

FRI-2G.405-1-ERI-08

LINEAR EQUATION MODELING OF WORK WORD PROBLEMS IN 7-TH GRADE¹⁰

Desislava Dimitrova, MSc

Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 883405447
E-mail: desi0204@abv.bg

Pr. Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD

Department of Mathematics,
Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 878165411
E-mail: alecheva@uni-ruse.bg

Abstract: This paper presents linear equation modeling of work word problems in 7-th grade. The stages of modeling and solving the created mathematical problems have been followed. For some of them, other solution options have been proposed. An exercise test has been created using SmarTest online platform and has been shown in present article.

Key words: Linear Equation Modeling, Work Word Problems, National External Assessment after 7-th grade.

ВЪВЕДЕНИЕ

Темата „Уравнения“ е централна тема от училищния курс по математика. Тя започва да се изучава още в началните класове и заема важно място в следващите етапи на обучение. Разбирането и изграждането на умения за решаване на линейни уравнения е цел на обучението по математика, тъй като те се използват за решаване на други групи задачи, прилагат се в други науки и в практиката. Тези уравнения са важна част от темите, включени в учебното съдържание за националното външно оценяване (НВО) на знанията и уменията на учениците след 7. клас.

Линейните уравнения се изучават както като математически задачи, в които всички обекти са математически, така и като практически или приложни задачи, в които някои обекти са предметни, физически и др. Разнообразието от текстови задачи с моделиране на линейни уравнения, предоставено в учебниците по математика за 7. клас, дава шанс на учениците да се убедят колко важна роля имат тези уравнения в живота и в различни сфери на науката.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Текстовите задачи в училище

Уравненията възникват в практически задачи, при които дадена стойност не може да се измери непосредствено, но е известно равенство, което тя изпълнява. От това равенство се получава уравнение за намиране на неизвестната стойност (Колев Е., 2018).

Още в началните класове у учениците се изграждат умения за съставяне на алгебрични изрази по зададени условия и свързването им със знака за равенство. В пети клас те вече решават текстови задачи, които се свеждат до решаване на изучените уравнения и се срещат

¹⁰ Докладът е представен на на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2024 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: МОДЕЛИРАНЕ С ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ НА ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ ОТ РАБОТА В 7. КЛАС.

с за пръв път с понятието математически модел. Научават още, че създаването на математически модел започва с въвеждане на неизвестно число.

В следващите класове това понятие се доразвива на базата на по-богатия запас от математически знания, по-разширения обем задачи и на приложението на математиката в другите учебни дисциплини. Математическо моделиране в училищния курс по математика обикновено се използва във всички случаи, когато се налага решаване на текстови задачи.

2. Необходимост от методика на обучение за решаване на текстови задачи

Задачите с практико-приложен характер имат голямо значение при възпитаване интереса към математиката. Чрез тях учениците се убеждават в значението на математиката в различни сфери на човешката дейност, в нейната полза и необходимост при практическа работа, виждат възможностите на приложната математика. Решаването на текстови задачи помага за развиване мисленето на учениците, за по-дълбоко усвояване идеите на функционалните зависимости, повишава изчислителната им техника.

Решаването на всяка текстова задача е съпроводено от съставяне на модел, решаване на този модел и съпоставяне решението на модела с изходната ситуация. Опитът в училищата показва, че учениците не могат сами, без ръководството от страна на учителя, да овладеят тези изисквания. Това показва необходимостта да се провеждат редица упражнения в това отношение (<https://journals.uni-vt.bg/almanac/bul/vol19/iss1/art10>). В учебната програма на Министерството на образованието е заложен само по един час за упражняване на всеки вид текстови задачи за моделиране с линейни уравнения, което се оказва абсолютно недостатъчно за тяхното по-добро усвояване и затвърждаване. Поради тази причина, трайността на придобитите знания намалява.

Един от основните регистрирани проблеми е затруднението при съставянето на математически модел на реални житейски ситуации и преобразуването му с математически методи и алгоритми.

В подкрепа на обучаващите за решаване на този проблем могат да се формулират следните препоръки при решаване на математически модели:

1. Учителят трябва да има в запас достатъчно упражнения за преодоляване на получените затруднения. Например – решаване на задачи за формиране умения у учениците да виждат зависимости между величините, дадени в условието на задачата.

2. За допълване на пропуски в знанията на някои ученици да се дават специално подбрани задачи.

3. Необходима е системна, целенасочена работа за формиране у учениците на следните умения:

- умение да се открива и изразява на математически език изменението на величините и зависимостите между тях, като често пъти това са закони от физиката, химията и др.;
- умение внимателно да четат текста на задачата;
- умение да правят първичен анализ на текста, т.е. да отделят условието и въпросите на задачата;

• умение да оформят кратък запис на текста във вид на таблица, схема и т.н. При много от задачите (от движение, работа) се получава голяма нагледност, която облекчава процеса на усвояване на знанията. Ако задачата може да се реши без схема, тогава не е задължително да се прави;

- да получават нови знания от известни вече знания чрез правила за извод;
- да правят обобщения;
- лесно и бързо да преминават от един ход на мислене към друг (от анализ към синтез, от абстрахиране към конкретизиране, от индукция към дедукция);
- да разглеждат един и същ въпрос от различни гледни точки;
- да намират рационални решения на поставените задачи;
- да формират умение за краткост, яснота и простота на мисленето.

4. Въпреки че ученикът не бива да се учи да помни последователност от задължителни стъпки, при решаването на текстовите задачи е уместно да прилага етапите на

математическото моделиране с цел преодоляване на психическото напрежение и подобряване качеството на учебния процес. Това спомага за логическото мислене на учениците.

5. Учителят, имайки предвид трудностите, които срещат учениците при моделирането, трябва умело да ги насочва, да разсъждава заедно с тях, да анализира и т.н.

6. Важен момент при математическото моделиране е подборът и подреждането на задачите. Задачите трябва да се усложняват постепенно, да показват приложението на математиката в другите науки и практиката.

7. В началото на темата “Математическо моделиране” трябва да се актуализират и систематизират необходимите умения и знания.

8. След направеното актуализиране на необходимите знания, на учениците да се предлага съответното разделение на процеса на математическо моделиране (в зависимост от типа текстови задачи, които ще се решават).

9. В края на темите за математическо моделиране е добре да се направи самостоятелна работа. Това е един от начините, по които може да се установи доколко е усвоен материалът, какви са уменията на учениците за самостоятелно решаване на математически модели, за навременно откриване на грешки и отстраняването им.

3. Моделиране с линейни уравнения

Много задачи от живота, науката и техниката водят до решаване на уравнения. Съставянето на уравнение за дадена текстова задача означава, че задачата се превежда от езика на съответната практическа област на езика на математиката – казва се, че е построен математически модел на задачата (Паскалева З., Алашка М., Алашка Р., 2018).

В учебниците по математика за 7 клас се наблюдава значително надграждане на материала за моделиране с линейни уравнения, което се проявява и при разширяване обхвата на текстовите задачи, свързани с него:

- ✓ Общи задачи за моделиране с линейни уравнения;
- ✓ Задачи от движение;
- ✓ Задачи от работа;
- ✓ Задачи от капитал;
- ✓ Задачи от смеси и сплави.

Това дава шанс на учениците да доразвият и затвърдят уменията си за правилно определяне на неизвестната величина и построяване на математически модел на текстова задача.

Алгоритъм за решаване на текстови задачи, предложен в учебника по математика за 7 клас:

- Избира се неизвестно число и се определят допустимите му стойности.
- Съставя се математически модел → уравнение.
- Решава се уравнението и се проверява дали решението е от допустимите му стойности.
- Записва се с думи отговора на задачата.
- За онагледяване и удобство в някои случаи се използва чертеж и/или таблица.

4. Текстови задачи от работа

При този тип задачи се описва реална житейска ситуация за извършване на определена дейност – извършване на ремонтни дейности, изграждане на сгради, обработване на земеделски площи, пълнене на басейн с вода, изготвяне на даден проект и др. (Нинова Ю., Матакиева С., Райков Н., Христова Т., 2021).

Някои от задачите, свързани с извършване на определена работа, се решават чрез зависимостта $A = N \cdot t$, където A е количеството свършена **работа**; t е **времето**, за което е свършена работата A ; N е **нормата** (производителността), т.е. работата за единица време.

Тази зависимост е подобна на формулата за пътя при равномерно движение $S = v \cdot t$, където изминатият път S е свършената работа A , а скоростта v е работата за единица време (Паскалева З., Алашка М., Алашка Р., 2018).

В някои учебници във формулата по-горе означението N е заменено с означението P – от производителност, и формулата изглежда така: $A = P \cdot t$.

Няма никакво значение кое от двете означения ще бъде използвано. То не се отразява върху решението на задачата.

Както при задачите от движение, така и при тези от работа, съществено значение имат мерните единици (Таблица 1).

Таблица 1

Величини	Означения	Мерни единици
Извършена работа	A	m^2 , брой детайли, декари и др.
Време	t	min, h, дни и др.
Норма (производителност)	$N (P)$	m^2/h , детайли за дни и др.

Разграничават се два основни типа задачи за работа:

- задачи за определяне на производителност;
- задачи за пресмятане с дадена производителност.

4.1. Задачи за определяне на производителност

При тези задачи, ако обемът на работа не е даден като количество и в условието няма данни, чрез които той да се определи, то извършената работа се приема за единица. Тези задачи се решават чрез въвеждане на части от числото 1.

Задача 1: Един работник може да свърши определена работа за 15 дни, а друг работник може да свърши същата работа за 10 дни. Ако двамата работници работят заедно, за колко дни ще свършат работата?

Решение:

1) Ако двамата работници работят заедно, ще свършат работата за x дни, ДС: $x > 0$.

2) I работник за 1 ден свършва $\frac{1}{15}$ част от работата;

II работник за 1 ден свършва $\frac{1}{10}$ част от работата.

3) Приема се, че цялата работа е 1.

$$A_I + A_{II} = 1$$

Таблица 2

	Времето, за което сам свършва работата (дни)	За 1 ден (части от работата)	Работили (дни)	Свършена работа (части)
I работник	15	$\frac{1}{15}$	x	$x \cdot \frac{1}{15} = \frac{x}{15}$
II работник	10	$\frac{1}{10}$	x	$x \cdot \frac{1}{10} = \frac{x}{10}$

4) Уравнението е $\frac{x}{15} + \frac{x}{10} = 1$.

5) Решава се уравнението $\frac{x}{15} + \frac{x}{10} = 1$

$$\frac{2x + 3x}{30} = 1$$

$$2x + 3x = 30$$

$$5x = 30 \text{ } / : 5$$

$$x = 6$$

$$x = 6, \text{ ДС: } 6 > 0$$

Отг.: Ако двамата работници работят заедно, ще свършат работата за 6 дни.

Задача 2: Една тръба може да напълни един басейн за 12 часа, а друга – 2 пъти по-бързо. Първата тръба пълнила сама 3 часа, а след това отворили и втората. За колко часа се е напълнил басейнът?

Решение:

1) Ако двете тръби работят заедно, ще свършат работата за x часа, ДС: $x > 0$.

2) I тръба за 1 час свършва $\frac{1}{12}$ част от работата;

II тръба за 1 час свършва $\frac{1}{6}$ част от работата.

3) Приема се, че цялата работа е 1.

$$A_I + A_{II} = 1$$

Таблица 3

	Времето, за което сама свършва работата (часове)	За 1 час (части от работата)	Работили (часове)	Свършена работа (части)
I тръба	12	$\frac{1}{12}$	$x + 3$	$\frac{x + 3}{12}$
II тръба	6	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{x}{6}$

4) Уравнението е $\frac{x+3}{12} + \frac{x}{6} = 1$

5) Решава се уравнението: $\frac{x+3}{12} + \frac{x}{6} = 1$

$$\underline{x} + 3 + \underline{\frac{2x}{6}} = 12$$

$$3x = 9 \text{ } / : 3$$

$$x = 3, \text{ ДС: } 3 > 0$$

I тръба е “работила” $x + 3 = 3 + 3 = 6$ часа. II тръба е “работила” 3 часа.

Отг.: Басейнът се е напълнил за 6 часа.

4.2. Задачи за пресмятане с дадена производителност

Моделирането на този тип задачи е представено в следната таблица (Нинова Ю., Матакиева С., Райков Н., Христова Т., 2021).

Таблица 4

Реална ситуация	Математически модел <u>Решение:</u>
1) Работата по план е равна на работата в действителност	$A_{\text{план}} = A_{\text{действителност}}$
2) Работата по план е с x по-голяма от работата в действителност	$A_{\text{план}} - A_{\text{действителност}} = x$
3) Работата в действителност е с x по-голяма от работата по план	$A_{\text{действителност}} - A_{\text{план}} = x$

Задача 3: Конвейер в автомобилен завод сглобява за 24 дни определено количество автомобили. Той работил 22 дни с увеличена с 5 автомобили на ден норма и от конвейера слезли 80 автомобили над определеното количество. Да се намери дневната норма на конвейера по план.

Решение:

- 1) Означава се дневната норма N с x (автомобила), ДС: $x > 0$, цяло число.
- 2) Установява се, че:

$$\begin{aligned} A_{\text{план}} &< A_{\text{действителност}} \\ A_{\text{план}} + 80 &= A_{\text{действителност}} \end{aligned}$$

Таблица 5

	N	t (дни)	A
По план	x	24	$24x = A_{\text{план}}$
В действителност	$x + 5$	22	$22(x + 5) = A_{\text{действителност}}$

- 3) Уравнението е $24x + 80 = 22(x + 5)$.
- 4) Решава се уравнението $24x + 80 = 22(x + 5)$

$$24x - 22x = 110 - 80$$

$$2x = 30 / : 2$$

$$x = 15, \text{ДС: } 15 > 0$$

Отг.: Дневната норма по план е 15 автомобиля.

Задача 4: Асен се подготвял за изпит и трябвало да реши даден брой задачи за определен срок, като решава по 15 задачи на ден. Първите три дни той работил по план. След това увеличил дневната си норма с 20% и решил всички задачи 4 дни преди срока. Колко са дадените задачи и за колко дни ги е решил Асен?

Решение:

- 1) Означава се с x времето по план (дни), ДС: $x > 0$, цяло число.
- 2) Дадените задачи са $15x$, а времето, за което те са решени, е $(x - 4)$ дни.
- 3) Увеличената норма е $15 + 20\% \cdot 15 = 18$ задачи. Времето, през което Асен решава с увеличена норма, е $(x - 3) - 4 = x - 7$. Тогава:

$$A_{\text{план}} = A_{\text{действителност}}$$

Таблица 6

	N	t (дни)	A
По план	15	x	$15x$
В действителност	15	3	45
	18	$x - 7$	$18(x - 7)$

- 4) Уравнението е $15x = 45 + 18(x - 7)$.
- 5) Решава се уравнението $15x = 45 + 18(x - 7)$

$$15x = 45 + 18x - 126$$

$$-3x = -81 / : (-3)$$

$$x = 27, \text{ДС: } 27 > 0$$

По план са дадени: $15x = 15 \cdot 27 = 405$ задачи.

Решени са за: $x - 4 = 27 - 4 = 23$ дни.

Отг.: Дадени са 405 задачи, решени за 23 дни.

5. Индивидуална работа върху раздел Текстови задачи от работа

С онлайн платформата SmarTest (<https://www.smartest.bg/>) е разработен тест, който може да бъде зададен на учениците за домашна работа или за самоподготовка върху раздела Текстови задачи от работа.

Тестът съдържа 10 задачи за самостоятелна работа, като е използвана опцията за разбъркване на въпросите, за да може всеки ученик да работи върху индивидуален вариант на теста.

ТЕСТ 7 клас: Упражнение върху задачи от работа

1. Една сладкарница по план за 2 h произвежда 20 детски торти. С колко процента трябва да се увеличи производителността на сладкарницата, за да прави по 13 торти за 1 h? (1т.)
 а) С 10%
 б) С 20%
 в) С 40%
 г) С 30%
2. Трактор трябва да изоре един блок за определено време, като всеки ден изорава по 20 da. Той преизпълнил тази норма с 25% и за последният ден му останали за изораване само 18 da. Колко декара е целият блок? (1т.)
 а) 24 da
 б) 40 da
 в) 36 da
 г) 28 da
3. Илия слага по 60 покани за благотворителен концерт в пощенски пликове за 1 h. Колко покани ще успее да сложи в пощенски пликове за 2 h 15 min при същата производителност? (1т.)
 а) 160
 б) 150
 в) 145
 г) 135

Фиг.1 Част от теста за самостоятелна работа

Целият тест може да се види на следния линк:

<https://www.smartest.bg/ddimitrova3508/test-7-klas-uprajnenie-varhu-zadachi-ot-rabota-144671>

ИЗВОДИ

Настоящата статия представя урок, който има практическа насоченост и е подходящ за надграждане и затвърждаване на основните знания и умения на учениците по математика. Тъй като живеем в математически управляван и математически разбираем свят, доброто усвояване на темата за линейните уравнения и тяхното широко приложение дава шанс на учениците да осмислят по-ефективно заобикалящата ги обстановка, да развият своето пространственото мислене и способността си за решаване на конкретни проблеми. Представената тема спомага за стимулирането на интелектуалното и математическо им развитие и представлява добра основа за постигане на задоволителни резултати от НВО.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2024-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Dimitrova D., scientific advisor Antoaneta Mihova, Linear equations in the school mathematics course (2024), Master degree project, University of Ruse, (Оригинално заглавие: *Линейните уравнения в училищния курс по математика*, Дипломен проект, Русенски университет (2024)).

Kolev E., Mathematics textbook for grade 7, "Bulvest 2000" publishing house, 2017 (Оригинално заглавие: *Колев Е., Учебник по математика за 7 клас*, „Булвест 2000“, 2018).

Marinova V., Mathematical models and modeling in school mathematics course – nature and meaning, "Pedagogical almanac", University of Veliko Tarnovo publisher, 2017, available at <https://journals.uni-vt.bg/almanac/bul/vol19/iss1/art10> (Оригинално заглавие: *Математически модели и моделиране в училищния курс по математика – дидактически аспекти и значение*).

Ninkova P., Lilkova M., Stoeva T., Sharkova I., Radenkova L., Mathematics textbook for grade 7, "Prosveta-Sofia" publishing house AD, 2018 (Оригинално заглавие: Нинкова П., Лилкова М., Стоева Т., Шаркова И., Раденкова Л., *Учебник по математика за 7 клас*, „Просвета-София“ АД, 2018).

Ninova Yu., Matakieva S., Raikov N., Hristova T., Mathematics textbook for grade 7, "Prosveta plus" publishing house, 2021 (Оригинално заглавие: Нинова Ю., Матакиева С., Райков Н., Христова Т., *Учебник по математика за 7 клас*, „Просвета плюс“, 2021).

Paskaleva Z., Alashka M., Alashka R., Mathematics textbook for grade 7, Archimedes publishing house, 2018 (Оригинално заглавие: Паскалева З., Алашка М., Алашка Р., *Учебник по математика за 7 клас*, „Архимед“, 2018).

SmarTest online platform – онлайн платформа СмарТест, <https://www.smartest.bg/>

Test link, <https://www.smartest.bg/ddimitrova3508/test-7-klas-uprajenie-varhu-zadachi-ot-rabota-144671>.