

FRI-2G.405-1-ERI-09

DEVELOPING ALGEBRA PROBLEMS FOR 7TH GRADE BY SEVENTH GRADERS¹¹

Irina Vasileva, MSc

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse "Angel Kanchev"

Tel: +359 899908689

E-mail: vasileva_i_p@abv.bg

Pr. Assist. Prof. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse "Angel Kanchev"

Tel: +359 884109719

E-mail: rivanova@uni-ruse.bg

Abstract: The paper presents the problem posing method, which enhances students' learning activities to make them more active learners and confident problem solvers. Also are included the opinions of some researchers on the importance of its use. In this way, students get the opportunity to develop their creativity, independent thinking and logic, to understand and master the material better, handling more freely the different theorems, properties and signs. The paper presents developed algorithms of Algebra for 7th grade. They explain step by step how to approach the formulation of problems and give examples. In general, the principle is to choose a "scenario" of the problem and go from back to front. After composing the problem, it should be solved to detect possible inaccuracies or errors. At the end of each algorithm, the problem to the students is described - what requirements their problem should cover. All the presented algorithms are tested and 6 seventh graders from different schools have made algebraic problems based on them.

Key words: problem posing, seventh graders, algorithms, algebraic problems.

ВЪВЕДЕНИЕ

Математиката е фундаментална наука, която стои в основите на повечето други науки, но поради редица причини се оказва една от най-трудните учебни дисциплини. За съжаление, макар и да е модел на яснота и логическо мислене, много ученици изпитват затруднения при разбирането на математиката и я считат за неясна и безсмислена. Този проблем е предизвикателство за учители, изследователи и експерти, които непрекъснато търсят начин да го преодолеят.

Всъщност математиката присъства навсякъде около нас и е ключов инструмент за успешното справяне с различни предизвикателства в нашия живот: помага да се развие логическо мислене, усъвършенства способността да се мисли абстрактно и концептуално, помага да се правят прогнози и планове, помага на човека да си намери добре платена работа, а и в бита винаги трябва да се изчисли нещо.

Ето защо е важно учителите да мотивират и да провокират в учениците си позитивен подход към математиката, така че тя да се превърне от нещо скучно и трудно, в инструмент, който им помага да постигнат целите си и да развиват уменията си.

Традиционните методи на обучение, такива като: устно изложение на учебния материал от страна на учителя, беседа, работа с учебник и учебни помагала, наблюдение, демонстрация, упражнение все повече се оказват недостатъчно пригодни за съвременните ученици.

¹¹ Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2024 г. в секция „Образование – изследвания и иновации“ с оригинално заглавие на български език: СЪСТАВЯНЕ НА АЛГЕБРИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА 7 КЛАС ОТ СЕДМОКЛАСНИЦИ.

Съвременните поколения ученици изискват и съвременни методи на обучение по математика. Ето защо все повече учители се насочват към прилагането на различни техники или комбинация от техники за преподаване на математика, които ангажират децата и развиват тяхното логическо мислене.

Непрекъснатото актуализиране на методите на преподаване в образователната система, както и съобразяването им с процесите и изискванията на днешното общество, са необходими условия за усвояването на адекватни знания и умения в контекста на съвремението.

Прилагането на по-широка гама от методи, прави математиката не само по-интересна и разнообразна, но също така помага на обучаемите да: намират информация, разкриват взаимовръзки, развиват критичното си мислене, стимулират комуникативните си умения, презентират, интерпретират, вземат правилни решения, имат правилна самооценка за знанията и уменията си и за своите възможности.

Такива иновативни методи, които успешно да се прилагат в обучението по математика могат да бъдат: Метод на обърната класна стая, интердисциплинарни уроци и STEM подход, игри с математически задачи, Проектно базирано обучение, използване на адаптивни образователни платформи, Problem Posing - поставяне на проблем/задача.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Използването на метода Problem Posing - поставяне на проблем/задача може да бъде ефективен начин за стимулиране на учениците да се ангажират по-активно с учебния процес и да развиват разнообразни умения и способности.

Според Айнщайн (Einstein, 1966) „формулирането на проблем често е по-съществено от неговото решение, което може да бъде просто въпрос на математически или експериментални умения. Повдигането на нови въпроси, нови възможности, разглеждането на стари проблеми от нов ъгъл изисква творческо въображение и бележи истински напредък в науката“.

„Моделът за поставяне на проблеми има предимството, че подобрява учебните дейности на учениците, за да бъдат по-активни в ученето и уверени при решаването на задачи“ (Setiawan et al., 2018). Освен това Kojima (2015) подкрепя становището, че „problem posing“ е основен метод, който помага на учениците да решават задачи. По подобен начин Niss и Hojgaard (Niss et al., 2019) заявяват, че „problem posing“ е част от компетентността за решаване на задачи.

Този метод може да се прилага в математиката чрез създаването на задачи от учениците. Съставянето на задача обикновено започва с изходната точка - отговора или резултата - и след това последователно се стига до формулирането на условието на задачата.

За успешното прилагане на този метод, обаче, е нужно предварително подготвяне на учениците. Като всяко ново нещо, с което се сблъскват, е нормално първоначално те са притеснени и да изпитват несигурност. Един от начините това да се предотврати е като се опитват да съставят задачи с помощта на учител, периодично, по време на обобщителните уроци например.

Също така е необходимо да се предоставят на учениците насоки относно етапите, които да следват, за да създадат задачи успешно. Това означава да се разработят алгоритми, които да показват стъпка по стъпка как може да се състави вярна задача и за какво да се внимава, за да се минимизира риска от допускане на грешки.

Ключов момент е и проверката за допуснати неточности. Това може да стане като съставената задача се реши. Най-подходящо е да се реши от съученици, които като безпристрастни странични хора, биха открили по-лесно неточности, неясноти или несъвместимост на данните.

Обучението и усвояването на материала в 7 клас е голямо предизвикателство за ученици, родители и учители. В края на учебната година се полага изпит – Национално Външно Оценяване (НВО), от който зависи в кое училище ще продължи ученикът

обучението си и играе важна роля при определянето на бъдещето му образование и кариерно развитие. А алгебричните задачи, включени в програмата за 7 клас затрудняват голяма част от учениците. Съставянето на задачи би могло да подпомогне и улесни подготовката за НВО. Чрез този метод по един по-интересен и нов начин учениците могат да разберат и усвоят изучаваните видове алгебрични задачи, като ги прилагат на практика и сами откриват закономерностите в тях.

С цел тестване на приложението на този метод са разработени алгоритми, които да водят стъпка по стъпка учениците как да съставят задачи и по-конкретно задачи за: цели изрази, формули за съкратено умножение и разлагане на множители, линейни уравнения, свеждащи се до линейни и модулни уравнения, моделиране на задачи с уравнения – задачи за движение и работа, задачи с графики и диаграми. Шест седмокласници от различни училища в град Русе са съставяли задачи по предложените алгоритми.

Уравненията и изразите в чист вид не са от най-благоприятните за прилагане на метода, тъй като не предполагат голямо разнообразие и широко поле за творчески подход. При тях има два варианта за съставяне на задачи:

1. Да се тръгне от отговора, т.е. корена на уравнението и да се достигне първоначалния вид, като двете страни се умножават, делят, събират или изваждат с едно и също число.
2. Да се състави директно уравнение със случайно избрани данни на принципа „проба-грешка“

Прилагането на метода „съставяне на задачи“ има своите положителни и отрицателни страни:

От една страна при съставянето на такива задачи не се изисква задължително комбиниране на разнообразни формули и теореми, което улеснява задачата за учениците до степен, че не се постига напълно целта на прилагането на метода.

От друга страна улесненото съставяне на задачи ги прави подходящи за първоначално прилагане на метода от чисто психологическа гледна точка. Така учениците ще тестват метода и способностите си с нещо по-лесно.

Задачите за моделиране – за работа, път, графики и т.н. са значително по-комплексни и изискват повече съобразителност, комбинативност и концентрация. Ето защо те са по-подходящи за по-късен етап, когато учениците вече имат опит в съставянето на задачи и тази сложност няма толкова да ги притесни.

Алгоритъм за моделиране с уравнения. Задачи за движение и работа

Стъпки:

1. Избира се какъв тип задача ще се съставя. Може да бъде задача за движение, в която: два обекта се движат един срещу друг и се срещат или разминават; два обекта се движат в една посока, с една изходна точка и се настигат; даден обект „отива и се връща“ (когато движението е по река, скоростта на движение по течението е сбор от собствената скорост на обекта и скоростта на самото течение. Когато движението е срещу течението, скоростта получаваме като от собствената скорост извадим скоростта на самото течение.) Ако задачата е за работа може да бъде за тръби, които пълнят/изпразват басейн; строители, които работят на обект; бригада, която трябва да изпълни поръчка; комбайн, който прибира реколта и т.н.
2. Съставя се таблица със стойности за скорост или време по избор, неизвестните стойности се отбелязват и изразяват с x . Обмисля се какво уравнение и съответно условие може да се състави. Правят се корекции на данните при необходимост.
3. Съставя се условие на задачата.
4. Решава се задачата.

Пример:

1. Нека задачата да е за двама майстори, които боядисват сграда.
2. Нека единият майстор може сам да боядиса сградата за 6 часа, а вторият - за 4 часа. С тези данни могат да се попълнят първите две колони на таблицата (табл. 1). Обикновено неизвестното е в колоната „време“. Ако двамата започват и завършват едновременно работа,

то и на двата реда ще има x , но може да се укаже в условието че вторият ще започне половин час по-късно. Тогава времето му ще е $(x - \frac{1}{2})$. Работата на всеки от тях ще се получи като се умножат данните от колона „за 1 час“ и „t“.

Уравнението по правило се съставя, като се събере работата на двамата и се приравни на 1. Може да се зададе въпрос колко време ще е необходимо, за да свършат някаква част от работата.

Забележка: За часовете в първата колона се избират числа, които да не са много големи и/или имат възможно най-много общи делители, тъй като тези числа ще „слязат“ в знаменател и ще трябва да се търси общ знаменател.

Таблица 1

	сам	За 1 час	t	A (работа)
I тръба	6	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{1}{6} \cdot x$
II тръба	4	$\frac{1}{4}$	$x - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \cdot (x - \frac{1}{2})$

3. Вече са известни всички данни и остава да се „сглоби“ условието на задачата:

Двама майстори трябва да боядисат склад. Първият може да боядиса всичко сам за 6 часа, а вторият – за 4 часа. Първият започнал работа в 9 часа сутринта, а вторият – тридесет минути по-късно. В колко часа ще са свършили $\frac{3}{4}$ от работата?

4. Решава се задачата. Първо се съставя таблицата (табл.2):

Таблица 2

	сам	За 1 час	t	A (работа)
I тръба	6	$\frac{1}{6}$	x	$\frac{1}{6} \cdot x$
II тръба	4	$\frac{1}{4}$	$x - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \cdot (x - \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot (x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

След разкриване на скобите и привеждане под общ знаменател се получава:

$$4x + 6x - 3 = 18$$

$$10x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{10} = 2,1$$

0,1 часа се превръща в минути като се умножим по 60 и се получава 6 мин. Тоест общо 2 часа и 6 минути. Следователно $\frac{3}{4}$ от работата са свършили в **11 часа и 6 минути** (9 ч. и 0 мин. + 2ч. и 6 мин.)

За илюстрация на резултата от апробирането на алгоритъма, може да се разгледа следната задача, съставена от един от учениците:

Задача 1: Моторна лодка тръгва от пристанище А към пристанище В и се връща общо за 6 часа. Ако собствената скорост на лодката е 20 км/ч., а скоростта на течението е 20% от нея, да се намери:

а) разстоянието от А до В;

б) в колко часа е пристигнал в В, ако е тръгнал от А в 8,30 ч. сутринта?

Дадено: $V_{\text{л}} = 20 \text{ км/ч}$

Търси се: а) $S_{AB} = ?$ б) $t_{AB} = ?$

$V_{\text{теч}} = 20\% \text{ от } V_{\text{л}}$

$t - 6 \text{ ч. в двете посоки}$

Решение:

Таблица 3

	S	V	t
По течението	$24x$	24	x
Срещу течението	$16 \cdot (16x)$	$20 - 20\% \text{ от } 20$ 16	$6 - x$

$$24x = 16 \cdot (6 - x) \quad 24x = 96 - 16x \quad 40x = 96 \quad x = 2,4 \text{ часа}$$

$$\text{а) } S = 24x = 24 \cdot 2,4 = 57,6 \text{ км}$$

$$\text{б) } 0,4 \text{ ч} = 0,4 \cdot 60 = 24 \text{ мин} \Rightarrow t = 2 \text{ ч и } 24 \text{ мин}$$

$$8 \text{ ч и } 30 \text{ мин} + 2 \text{ ч и } 24 \text{ мин} = 10 \text{ ч и } 54 \text{ мин}$$

Алгоритъм за съставяне на задачи диаграма

Стъпки:

1. Избира се темата на задачата – Важно е да има различни групи (продукти, хора, спортове), за които да могат да се зададат различни параметри

2. Започва да се изработва диаграма и да се нанасят на нея данни. Предварително се определят обектите и показателя по който ще се разделят

При стълбовидна диаграма те се нанасят съответно на абцисата и ординатата, след което се определя височината на колоните така, че да се получат подходящи числа в проценти, бройки и отношение към цялото

При кръгова диаграма се разделя кръга на сектори, като за градусите на всеки сектор се подберат числа, кратни на 3,6. Избира се общият брой и така се определя броят обекти и процентите за всеки сектор. Правят се корекции в данните ако е необходимо.

3. Избират се въпроси, които да се зададат по наличната диаграма, кои данни да се „зачеркнат“ и кои да се дадат в условието, така че задачата да е решима. Съставя се условие на задачата

4. Решава се задачата.

Пример:

1. Темата на задачата ще е годишния успех (оценките) на седмокласниците в едно училище.

2. Изработва се стълбовидна диаграма и се нанасят на нея данни по абцисата и ординатата.

В случая по абцисата ще се нанесат възможните оценки (2, 3, 4, 5, 6).

Определя се височината на колоните. Ако по ординатата няма да се нанасят направо стойности (10, 20, 30 ...), а тяхна зависимост (m , $2m$, $3m$...), то първо трябва да се определи на колко ще е равно „ m “ и това трябва да е число – делител на общия брой. По-удобно да се определи стойността на m и височината на колоните, след което да се изчисли общия брой. Възможно е също първо да се избере число за общия брой, да се раздели числото на „ m “ и така ще се получи стойност, която да се „разпредели“ по колоните, така че те да са с различна височина.

Първи начин: Избира се $m = 3$. Нанася се височината на колоните на случаен принцип, след което се умножава по m , за да се получи броя ученици за всяка колона. Събират се данните за всички колони и се получава общия брой.

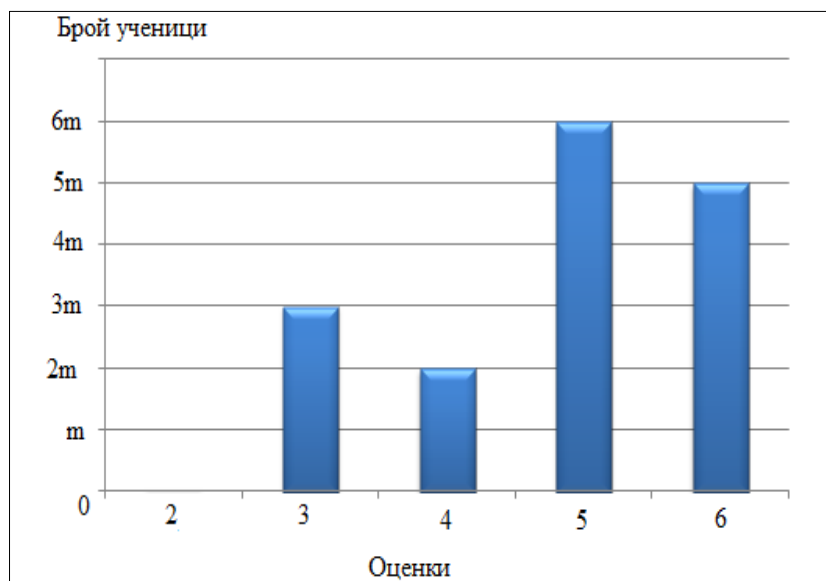
Втори начин: Ако в училището има две паралелки 7 клас, то е логично учениците да са около 48. Избира се такова число, че да има повече делители: 2, 3, 4, 6 Избира се $m = 3$. Тогава сбора на стойностите (деленията) от всички колони ще е $48:3 = 16$. Тъй като е малко вероятно накой да завърши с оценка слаб, може да се разпредели 16 за останалите 4 оценки. Например: среден – $3m$ ученици, добър – $2m$ ученици, много добър – $6m$ ученици и отличен – $5m$ ученици ($3 + 2 + 6 + 5 = 16$).

3. Преценява се какви въпроси могат да се зададат по наличната диаграма, кои данни да се „зачеркнат“ и кои да присъстват в условието, така че задачата да е решима. Съставя се условие на задачата.

Очевидно средното аритметично което трябва да се търси ще е средния успех на седмокласниците. За изчисляване на процент, както и на вероятност ще използвам броя на учениците завършили с дадена оценка към общия брой на учениците. Например:

В едно училище има 48 седмокласници, чиито успех е даден на диаграмата (фиг. 1). Намерете:

- Средния успех на седмокласниците;
- Вероятността случайно избран седмокласник са е получил оценка „много добър“;
- Колко процента от учениците в 7 клас завършват с оценка „добър“?



Фигура 1

4. Задачата се решава.

$$а) 3m + 2m + 6m + 5m = 16m = 48 \Rightarrow m = 3$$

среден - $3m = 3 \cdot 3 = 9$ ученика

добър - $2m = 2 \cdot 3 = 6$ ученика

мн.добър - $6m = 6 \cdot 3 = 18$ ученика

отличен - $5m = 5 \cdot 3 = 15$ ученика

$$\frac{9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 18 \cdot 5 + 15 \cdot 6}{48} = \frac{18 + 18 + 90 + 90}{48} = \frac{216}{48} = 4,50 - \text{средна оценка}$$

б) $P = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$ е вероятността случайно избран седмокласник са е получил оценка „много добър“

$$в) \frac{6}{48} = \frac{x}{100} \Rightarrow 48x = 100 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{600}{48} = 12,5\%$$

Получават се стойности, удобни за пресмятане и задачата остава в този вид.

Отново може да се демонстрира какви задачи са съставили учениците с една от тях.

Задача 2: Сладкарница предлага торти, както и дребни сладки и соленки в тарелки по 1 кг. Месечните продажби са показани на диаграмата (фиг. 3). Ако знаем, че дребните сладки са 10% от продажбите, а тортите към соленките се отнасят както 5:1, както и че са продадени 30 тарелки соленки, намерете:

- колко градуса е централният ъгъл на сектор „солени“;

б) по колко от трите вида продукти са продадени?



Фигура 2

Решение:

а) торти + соленки = 90% $\Rightarrow 5x + x = 90\% \Rightarrow 6x = 90\% \Rightarrow x = 15\% \Rightarrow$
соленки: $15\% \cdot 3,6 = 54^\circ$

б) 30 бр = 15% $\Rightarrow 1\% = 2бр \Rightarrow$ Торти: $5x = 75\% \Rightarrow 150$ бр.

Дребни сладки: 10% $\Rightarrow 20$ бр.

След приключване на работа по заданията, всички участници са попълнили анкетни карти със своята количествена и качествена оценка на сложността в скала от 1 до 10.

Осреднените резултати показват, че най-трудни за тях са задачите за движение и работа, със средна и малко над средната трудност са оценени геометричните задачи и задачите с диаграми, а най-лесно са се справили със съставянето на уравнения (табл. 4).

Таблица 4

Име	Формули за съкратено умножение	Задачи за движение	Задачи за работа	Ъгли и триъгълници	Четириъгълници	Стълбовидна диаграма	Кръгова диаграма
Емануела	2	10	9	7	7	8	8
Берк	1	9	8	5	6	8	7
Симона	2	8	8	5	5	6	7
Ива	1	8	8	6	4	2	3
Елиноор	4	6	6	5	5	7	5
Виктория	2	7	3	7	8	2	2
Средна оценка (1-10)	2	8	7	5,8	5,8	5,5	5,3

Първоначално повечето ученици са резервирани и леко притеснени да не сгрешат, тъй като са се сблъснали с нещо съвсем ново за тях. След първите 2-3 опита, те се отпускат и започват да работят по-уверено, което води до по-добри резултати и накрая дори им става интересно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ето защо може да се обобщи, че ако се работи системно и учениците имат предварителен опит, т.е. с тях е работено в часовете по този метод, те биха могли да изпълнят успешно заданията за съставяне на задачи, така че да постигнат поставените цели: да се предизвика интерес у тях към математиката и да започнат да боравят и да „комбинират“ по-свободно свойствата и теоремите.

БЛАГОДАРНОСТ

Това изследване е подкрепено от проект 2024-ФПНО-03, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Einstein A. L. Infeld, Evolution of Physics (1938, 1966)

Kojima K., Miwa K., Matsui T. Experimental study of learning support through examples in mathematical problem posing. Research and Practice in Technology Enhanced Learning (2015). <https://doi.org/10.1007/s41039-015-0001-5>

Niss M., T. Hojgaard Mathematical competencies revisited. Educational Studies in Mathematics, (2019). <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>

Setiawan A, E. Putro - Implementation of Problem Posing Learning on Conceptual Understanding and Adaptive Reasoning (2018) https://www.researchgate.net/publication/329938087_Implementation_of_Problem_Posing_Learning_on_Conceptual_Understanding_and_Adaptive_Reasoning

Vasileva, I., scientific advisor Ralitsa Vasileva-Ivanova, Developing systems of problems for 7th grade by seventh graders (2024), master's degree thesis, University of Ruse, (**Оригинално заглавие:** Съставяне на системи от задачи за 7 клас от седмокласници, Дипломна работа, Русенски университет (2024))