FRI-2G.307-1-ERI-11

MATHEMATICAL PROBLEMS FOR EXTRACURRICULAR ACTIVITIES AT THE JUNIOR HIGH SCHOOL LEVEL[13]

Aleksandar Kirilov, MSc
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 878738198
E-mail: aik_aik@abv.bg

Assoc. Prof. Yuriy Kandilarov, PhD
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences and Education
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 889518824
E-mail: ukandilarov@uni-ruse.bg

Abstract: *The paper presents the possibilities of extracurricular mathematics activities at the lower secondary education level as an innovative educational environment for students with advanced mathematical abilities. The focus is placed on the role of the wording of mathematical problems as a means of increasing learning motivation. The paper also included examples that demonstrated how mathematical content can be combined with real scientific or curious fackts and social and environmental issues. Through selected examples, it is demonstrated how combining mathematical content with real-life situations and moral dilemmas stimulates cognitive interest, independent information seeking, and value-based reflection within the learning process.*

Key words: *extracurricular mathematics activities, innovation in education, problem-based learning, student motivation, social and environmental awareness.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Математиката заема ключово място в учебната програма, особено в прогимназиалния етап, когато се затвърдяват основите на абстрактното мислене, аналитичните и когнитивни умения за решаване на проблеми. Училищният курс по математика е структуриран в рамките на държавните образователни стандарти и учебните програми, които определят съдържанието и очакваните резултати от обучението. Учебният процес често е ограничен от учебно време, нормативни изисквания и необходимостта от усвояване на задължителен минимум знания и умения от всички ученици. Това води до трудности при отчитане на индивидуалните образователни потребности, интереси и способности на учениците.

Извънкласната дейност по математика се явява естествено допълнение на училищния курс, като предоставя възможност за разширяване и задълбочаване на усвоените знания в по-гъвкава и стимулираща среда. Тя може да бъде насочена както към ученици, които изпитват затруднения при усвояването на учебния материал и се нуждаят от допълнителна подкрепа, така и към ученици с изявени математически способности, които усвояват с лекота учебния материал. За разлика от задължителните учебни часове, извънкласната форма позволява използването на разнообразни занимателни задачи и математически игри. Това създава условия за по-активно участие на учениците и е предпоставка за формиране на положително отношение към математиката като наука и средство за опознаване на света.

Настоящата статия е фокусирана върху извънкласната дейност по математика, ориентирана към ученици с изявени математически способности в прогимназиалния етап на обучение и има за цел създаване на предпоставки за поддържане и развитие на интереса към математиката, чрез

[13] Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2025 г. в секция „Образование – изследвания и иновации" с оригинално заглавие на български език: ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ ЗА ИЗВЪНКЛАСНА ДЕЙНОСТ ПО МАТЕМАТИКА В ПРОГИМНАЗИАЛЕН ЕТАП.

осигуряване на занимания с по-висока степен на сложност. Загубата на мотивация често възниква при липса на достатъчни интелектуални предизвикателства. Като основа на настоящата статия е използван дипломен проект на тема „ Извънкласна работа по математика за 5 клас“, разработен от Александър Кирилов, магистър от специалност „Методика на обучението по математика“ към Русенски университет.

ИЗЛОЖЕНИЕ

За разлика от стандартните задачи, които обикновено са ориентирани към затвърдяване на конкретни теореми, свойства и алгоритми, задачите в извънкласната форма следва да притежават по-висока степен на познавателна и интелектуална провокация. В този смисъл не само математическата трудност, но и текстът на задачата се превръща в съществен фактор за ангажиране на учениците.

Включването на действителни факти от заобикалящия свят в текста на задачите, допринася за осъзнаване на практическата приложимост на математиката. Задачи, базирани на реални данни и параметри от науката, екологията и обществения живот, стимулират учениците да търсят допълнителна информация, да анализират източници и да правят обосновани изводи. Особено място в извънкласната дейност заемат задачи, които включват морални казуси и примери за съпричастност. Такива задачи създават възможност за дискусия и споделяне на различни гледни точки, като едновременно с това поддържат високото ниво на математическа сложност на задачите, необходимо за ученици с изявени способности.

Комбинирането на математическо съдържание с реални факти, морални или екологични проблеми повишава мотивацията за участие в извънкласните занимания и съдейства за задържане на интереса към математиката. По този начин извънкласната дейност не само развива математическите способности на учениците, но има и възпитателна функция, като допринася за формирането на активни, отговорни и социално ангажирани личности.

Примерни теми, които могат да бъдат включвани в извънкласната дейност на различни етапи и с нарастваща трудност са (Lesov&Dojchev,1995; Rangelova&Mavrova, 2012; Rangelova, 2012, Rangelova, 1996; Rusev, Bankov&Savchev, 1986; Velichkov,1986):

- диофантови уравнения;
- принцип на Дирихле;
- задачи с множества;
- логически задачи;
- задачи от движение;
- задачи от работа;
- геометрични задачи;
- математически ребуси;
- комбинаторни задачи;
- задачи за претегляния и преливания.

С цел онагледяване на разглежданата идея ще бъдат представени примери за математически текстови задачи, на които е интегрирано съдържание, включващо реални факти, социални казуси и екологични проблеми.

1. Задачи от движение

Задачите от движение могат да бъдат много разнообразни, но основното при тях е зависимостта между величините скорост, време и изминат път, която се изразява с формулата:

$$\boldsymbol{S = V.t} \qquad (1)$$

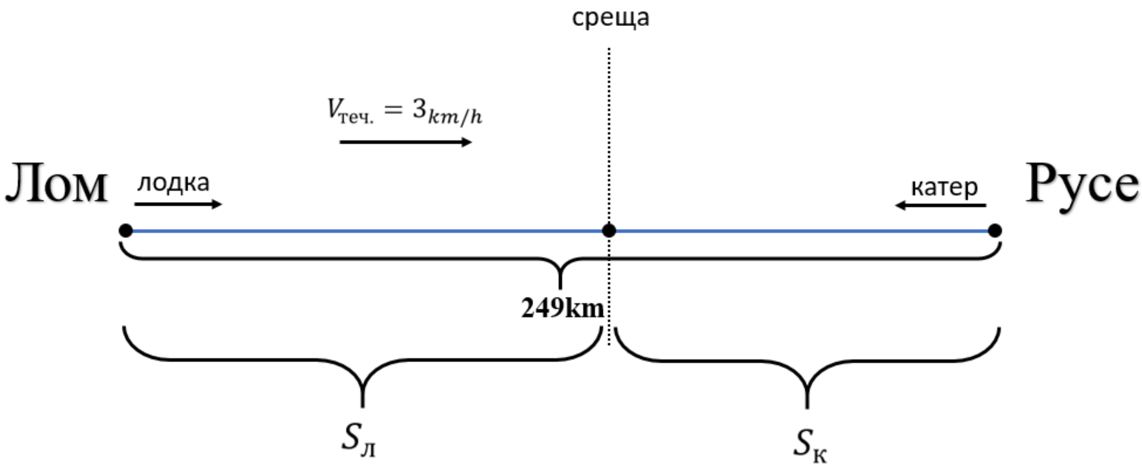
При решаване на задачи от движение може да се използва алгоритъм от 4 стъпки, като в зависимост от самата задача някоя от тези стъпки може да бъде пропусната.

1) Изготвяне на чертеж съответстващ на условието на задачата.
2) Съставяне на таблица, в която се нанасят величините скорост, време и изминат път.
3) Избор на неизвестна величина.
4) Съставяне и решаване на уравнение.

Задача 1: *Разстоянието между гр. Лом и гр. Русе по река Дунав е 249 km. От Русе срещу течението тръгнал катер, а един час след него от пристанище Лом по течението тръгнала моторна лодка. Двете превозни средства се срещнали 4 часа след тръгването на лодката. Скоростта на течението на река Дунав е 3km/h. Да се намерят скоростите на лодката и катера в спокойни води, ако те са равни*. (Грозев, 2007)

Решение:

Следвайки посочения алгоритъм, **първо** се изготвя чертеж (Фиг.1):



Фиг. 1. Схематично изобразяване на условието от Задача 1.

Втората стъпка е съставяне на таблица (Таблица 1):

Таблица 1

	Път (S)	Скорост (V)	Време (t)
лодка	$S_л$	$(x+3)km/h$	**4h**
катер	$S_к$	$(x-3)km/h$	**5h**

Трета стъпка е избор на неизвестна величина. За неизвестна величина често се избира това, което се търси в задачата – скоростта на лодката или катера в спокойни води. От условието на задачата е известно, че скоростта на течението на реката е 3km/h. Така за скоростта на лодката, която се движи по течението, се получава $V_л = (x+3)\ km/h$, съответно скоростта на катера, който се движи срещу течението, ще бъде $V_к = (x-3)\ km/h$.

Четвърта стъпка е съставяне и решаване на уравнение. Ползвайки зависимост (1) за изминатия от лодката път се получава:

$$S_л = V_л.t_л = (x+3).4\,,$$

а пътят изминат от катера ще бъде:

$$S_к = V_к.t_к = (x-3).5$$

Пътят, изминат от двете превозни средства е равен на разстоянието между градовете Русе и Лом, което според условието на задачата е 249km:

$$S_л + S_к = 249$$

$$(x+3).4 + (x-3).5 = 249$$

Решаването на това уравнение води до отговора на задачата: $x = 28$

Отг. 28 km/h.

Реални факти от условието на задачата:

- Всеки обект по поречието на река Дунав се характеризира с отстоянието си от устието на реката, измерено в километри. Съответно, гр. Русе се намира на $496^{-ти}$ километър, а гр. Лом, който е по-далече от устието на реката, се намира на $745^{-ти}$ километър.

- Тези разстояния се обозначават с табели, поставени на брега, така че да се виждат от преминаващите лодки и кораби.

- Скоростта на течението варира между 1,1 km/h и 7,5 km/h. То е различно в горната, средната и долната част на река Дунав и се мени в зависимост от пълноводието на реката (https://www.mtc.government.bg/pk/sites/default/files/documents/428/720/pril1tcmkorab.pdf).

2. Задачи, решавани с диофантови уравнения

Това са уравнения от вида

$$\boldsymbol{a.x + b.y = c}\ , \qquad (2)$$

където $a, b, c \in \mathbb{Z}$, а x и y са неизвестни. При диофантовите уравнения се търсят само цели положителни решения. При решаването им не е достатъчно учениците да притежават добре развити изчислителни умения, но се изискват съобразителност и логическо мислене.

<u>Задача 2:</u> *В едно училище децата се включили в коледна кампания за събиране на дрехи и играчки. Опаковали ги в 17 кашона. За да ги различават, върху кашоните с дрехи залепяли по 7 коледни стикера, а върху кашоните с играчки залепяли 5 коледни стикера. Колко кашона с играчки са подготвили децата, ако е известно че са залепени общо 95 стикера?* (Раковска, 2019)

<u>Решение</u>:

<u>Означаваме:</u>

$x \rightarrow$ брой кашони с дрехи;

$y \rightarrow$ брой кашони с играчки.

От условието е известно, че кашоните са общо 17, следователно:

$$x + y = 17\ . \quad (3)$$

I начин:

Съставя се диофантово уравнение от вида (2), като се вземат предвид условията, че на кашоните с дрехи са залепени по 7 стикера, на кашоните с играчки са залепени по 5 стикера и всички залепени стикери са 95:

$$7.x + 5.y = 95\ ,$$
$$7.x = 95 - 5.y\ ,$$
$$7.x = 5.(19 - y). \quad (4)$$

Дясната страна на уравнението, $\mathbf{5.(19 - y)}$, е число, което се дели на 5. Следователно и лявата част на уравнението, $\mathbf{7.x}$, също трябва да е число, което се дели на 5. От съображение, че 7 не се дели на 5, се стига до извода, че x е число, което се дели на 5.

Освен това, $x < 17$, тъй като по условие $x + y = 17$.

От условието може да бъде въведено допълнителното ограничение $7.x < 95$, или $x < 14$.

Тогава за x остават само две възможности: $x_1 = 5$ и $x_2 = 10$.

От (4) се извежда следната зависимост: $y = (95 - 7.x): 5$.

Може да се използва таблица (Таблица 2) за визуализиране на всички възможни решения, като се включи и ред за проверка, дали възможното решение отговаря на зависимост (3):

Таблица 2

x	5	10
$y = (95 - x.7): 5$	12	5
$x + y$	**17**	15

От таблицата се вижда, че единственото решение на задачата е $x = 5$ и $y = 12$.

Отг. 12 кашона

II начин:

Допуска се, че всички кашони са с играчки и върху тях са залепени по 5 стикера. Тъй като кашоните са 17, се получава: 17.5=85 бр. стикери. От условието на задачата е известно, че са използвани 95 коледни стикера.

Ако всички кашони са с играчки, ще се използват 10 стикера по-малко, отколкото са по условие. За един кашон с дрехи се използват 2 стикера повече, отколкото при кашон с играчки.

Ако 5 от кашоните с играчки бъдат заменени с кашони с дрехи, ще се достигне необходимото количество от 95 използвани стикера.

Стига се до извода, че учениците са подготвили за благотворителната кауза 5 кашона с дрехи и 12 кашона с играчки.

Отг. 12 кашона

Социален казус в текста на задачата:

Условието на задачата е изградено върху социално значима и близка до учениците ситуация – участие в благотворителна коледна кампания за събиране на дрехи и играчки. Чрез този текст се загатват важни социални проблеми, свързани с неравенството в обществото и нуждата от подкрепа на деца в затруднено положение. Вратата към доброволчество и съпричастност остава отворена. В същото време социалният контекст е съчетан с математическия проблем, без да се нарушава неговата логическа яснота, като на учениците са предложени два коренно различни начина за решаване на задачата.

3. Задачи от множества

За понятието **множество** не се дава определение. Неговият смисъл се разяснява с примери за съвкупност от обекти (хора, числа, букви, предмети и др.), които могат да се различават или да си приличат по определена своя характеристика. Едно множество може да се зададе конструктивно (изброяват се всичките му елементи) или дескриптивно (посочва се свойство, характерно за всичките елементи на множеството). При решаване на задачи с множества се използват диаграми на Ойлер-Вен, в които множествата се възприемат като затворен контур (най-често кръг). Ако имаме две множества А и В, то с тях могат да бъдат извършвани различни операции.

\# **Обединение**. Записва се $A \cup B$. Обединението на множествата А и В е множество, което съдържа всички елементи, които са или в А или в В.

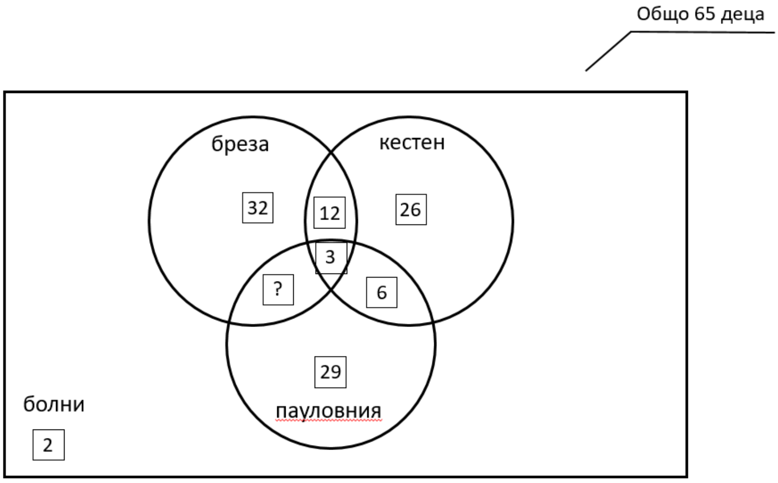
\# **Сечение**. Записва се $A \cap B$. Сечението на множествата А и В е множество, което съдържа всички елементи, които са и в А и в В.

\# **Разлика**. Записва се $A \setminus B$. Разликата на множествата А и В е множество, което съдържа всички елементи които са в А, но не са в В.

<u>**Задача 3:**</u> *По случай деня на земята учениците от 7 клас в едно училище искали да засадят дръвчета. От отдел „Паркове и градини" им предоставили фиданки от бреза, кестен и пауловния. 32 от учениците участвали в засаждането на брези, 26 деца садили кестени, а 29 участвали в засаждането на пауловния. Шест от децата засаждали и кестени, и пауловнии. Те обаче били само половината от тези, които успели да засадят и брези, и кестени. Най-активните в засаждането били трима ученика – те засадили и от трите вида дръвчета. Ако е известно, че петокласниците в това училище са 65 и имало 2 болни деца, които не могли да участват в това екологично мероприятие, намерете колко са децата, засадили и бреза, и пауловния?* (Алексиева, 2022)

<u>**Решение:**</u>

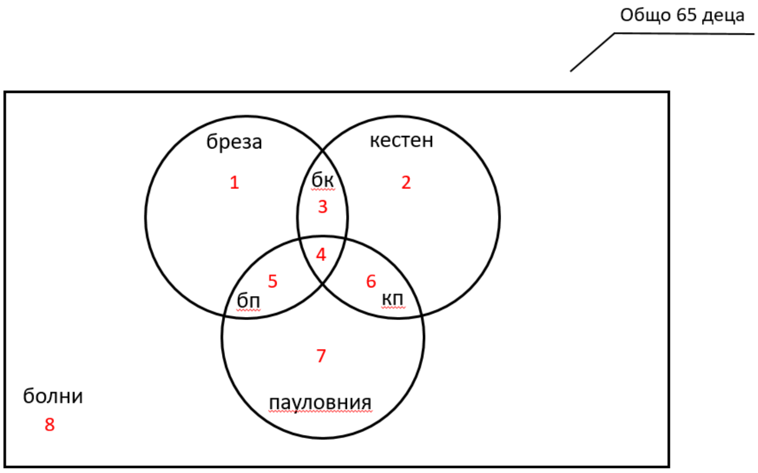
Трябва да се съобрази, че диаграмата на Ойлер-Вен ще се състои от три кръга (https://bg.wikipedia.org/wiki/Диаграма_на_Вен), които ще представляват множествата на учениците, които засаждат три различни по вид дървета – бреза, кестен и пауловния. Освен това тези три множества ще бъдат подмножества на едно универсално множество на всички ученици в 7 клас, като в това множество ще се включат и двете болни деца, които не са успели да участват в екологичната инициатива, виж Фиг. 2.



Фиг. 2. Диаграма на Ойлер-Вен за Задача 3

I начин:

Ако диаграмата бъде разгледана като пъзел, съставен от 8 части, номерирани с числата от 1 до 8 (означени с червено на Фиг. 3), то решаването на задачата се свежда до намиране на всяка една от тези части. Броят на децата в неизвестната част от пъзела ще бъде означена с $\boldsymbol{x}$.



Фиг. 3

4 – брой ученици, засаждали от трите вида дървета. По условие те са 3. $\text{БКП} = 3$

6 – брой ученици, засаждали само кестен и пауловния. $\text{КП} = 6 - 3 = 3$

3 – брой ученици, засаждали само бреза и кестен. По условие децата, засаждали и кестен и пауловния са половината от тези засаждали и бреза, и кестен $\Rightarrow \text{БК} = 6.2 - 3 = 9$

5 – брой ученици, засаждали само бреза и пауловния. $\text{БП} = x$

1 – брой ученици, засаждали само бреза, без да са участвали в засаждането на други дървета. $\text{Б}= 32 - (9 + 3 + x) = 20 - x$

2 – брой ученици, засаждали само кестен. $\text{К} = 26 - (9 + 3 + 3) = 11$

7 – брой ученици, засаждали само пауловния. $\text{П} = 29 - (3 + 3 + x) = 23 - x$

8 – брой на болните ученици. По условие те са двама.

Като се знае, че всички седмокласници са 65 и е известен броя учениците, съответстващ на всяка една част от пъзела, се съставя уравнение:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 = 65,$$
$$(20 - x) + 11 + 9 + 3 + x + 3 + (23 - x) + 2 = 65$$

Коренът на това уравнение е $x = 6$.

Броят на учениците, засаждали и бреза и пауловния (сечението на двете множества бреза и пауловния) включва секторите 4 и 5, или общият им брой е 6+3=9.

Отг. 9 деца

II начин: Чрез използване на **принципа за включване и изключване**.

Ако имаме три крайни множества A, B и C, тогава:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (4)$$

В задачата има три множества на учениците, засаждащи бреза, кестен и пауловния. Те ще бъдат отбелязани така: Б, К и П. С тези означения на множествата се замества в (4):

$$|\text{Б} \cup \text{К} \cup \text{П}| = |\text{Б}| + |\text{К}| + |\text{П}| - |\text{Б} \cap \text{К}| - |\text{Б} \cap \text{П}| - |\text{К} \cap \text{П}| + |\text{Б} \cap \text{К} \cap \text{П}| \quad (5)$$

Обединението на трите множества включва всички деца от 7 клас, без болните ученици.

$|\text{Б} \cup \text{К} \cup \text{П}| = 65 - 2 = 63.$

Броят на елементите на трите множества е даден в условието на задачата:

$|\text{Б}| = 32, |\text{К}| = 26$ и $|\text{П}| = 29.$

Броят на елементите в сечението на множествата Б и К е:

$|\text{Б} \cap \text{К}|$=12 .

Броят на елементите в сечението на множествата К и П е:

$|\text{К} \cap \text{П}| = 6.$

Броят на елементите в сечението на трите множества е:

$|\text{Б} \cap \text{К} \cap \text{П}| = 3.$

Броят на елементите в сечението на множествата Б и П е:

$|\text{Б} \cap \text{П}| = y.$

Тези стойности се заместват в (5):

$63 = 32 + 26 + 29 - 12 - 6 - y + 3$

След преобразуване на израза се получава: $y = 9$.

Отг. 9 деца

Екологична инициатива, интегрирана в текста на задачата:

Условието на задачата е изградено около екологично значима дейност. В текста се казва – „учениците искали да засадят дръвчета“. Подчертаването на тяхната инициатива в условието на задачата е предпоставка за осъзнаване на необходимостта от самостоятелна активност за подобряване на заобикалящата ни среда. Загатва се и идеята, че общата кауза може да обедини различни групи - в засаждането на дръвчета се включват всички седми класове в училището. Освен по-разпространените дървесни видове като бреза и кестен, в условието на задачата се споменава и по-слабо познатия вид пауловния. Това би допринесло до активизиране на познавателния интерес и да доведе до самостоятелно търсене и разширяване на знанията на учениците.

Освен това математическият проблем, формулиран върху задачи от множества, не остава на заден план. Предложени са два варианта за решение на задачата, което трябва да доведе до по-добро осмисляне на понятието „множество“ и операциите с множества.

Включването на допълнителен подтекст не е необходимо да присъства във всички текстови задачи, използвани в извънкласната дейност по математика. Достатъчно е във всяко занятие да бъде подбрана поне една такава задача, която да изпълнява ролята на мотивационен и познавателен акцент. В този процес важна роля има и педагогическото насочване от страна на учителя, който чрез деликатен коментар или въпрос при представянето на задачата, може да насочи вниманието на учениците към осмисляне на текста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Извънкласната дейност по математика в прогимназиален етап създава възможност за прилагане на иновативни подходи, насочени към ученици с изявени математически способности. Интегрирането на реални факти, социални и екологични проблеми в текста на задачите повишава мотивацията за учене и стимулира познавателния интерес. По този начин математиката се утвърждава не само като средство за интелектуално развитие, но и като фактор за формиране на морални ценности и социална ангажираност у учениците.

БЛАГОДАРНОСТИ

Това изследване е подкрепено от проект 2025-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Aleksieva, K., 2022. *Modeling and visualization in creative work in mathematics*. Shumen University Press (***Оригинално заглавие:*** *Алексиева К. 2022. Моделиране и нагледност в творческата работа по математика. Шумен, Университетско издание*)

Grozev, S., 2007. *For high achievments in mathematics: The Bulgarian experience - Theory and practice*, Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1)

Lesov H., Dojchev, S., 1995. *Topics for classroom and extracurricular work in mathematics for primary schools*, Regalia 6 Press, Sofia (***Оригинално заглавие:*** *Лесов Х., С. Дойчев. 1995. Теми за класна и извънкласна работа по математика за основните училища, Регалия 6, София*)

Rakovska, D., 2019. *Extracurricular activity in mathematics for 5th-8th grade*. Regalia 6 Press (***Оригинално заглавие:*** *Раковска Д. 2019. Задачи по теми за извънкласна работа по математика 5-8 клас. Издателство Регалия 6*, *София*)

Rangelova, P., Mavrova, R., 2012. *Non-standard methods for solving problems.* "Paisiy Hilendarski" University Publishing House, Plovdiv (***Оригинално заглавие****: Рангелова, П., Маврова, Р., 2012. Нестандартни методи за решаване на задачи. Университетско издателство „Паисий Хилендарски", Пловдив, ISBN 978-954-423-788-2*)

Rangelova, M., 2012. *Non-standard problems for 5th-7th grade.* Koala Press, Plovdiv (***Оригинално заглавие:*** *Рангелова М. 2012. Нестандартни задачи за 5.-7. клас. Коала прес, Пловдив, ISBN 978-954-9455-22-9*)

Rangelova, P., 1996. *Areas of Figures for 5th and 6th Grades.* Plovdiv, (***Оригинално заглавие:*** *П. Рангелова. 1996. Лица на фигури за 5. и 6. клас. Пловдив*)

Rusev, R., Bankov, K.,&Savchev, S., 1986. *Extracurricular Mathematics Assignments*, National Education, Sofia (***Оригинално заглавие:*** *Русев Р., К. Банков, С. Савчев, 1986. Задачи за извънкласна работа по математика, Народна просвета,София*)

Velichkov, V., 1986. *Collection of tasks of increased difficulty for 5th-8th grade*. Second Edition, National Education, Sofia (***Оригинално заглавие:*** *Величков В. 1986. Сборник от задачи с повишена трудност за V-VIII кл., Народна просвета, София*)

https://www.mtc.government.bg/pk/sites/default/files/documents/428/720/pril1tcmkorab.pdf (06.01.2026)

https://bg.wikipedia.org/wiki/Диаграма_на_Вен (06.01.2026)