

FRI-2G.307-1-ERI-07

SOLVING INEQUALITIES BY USING GEOGEBRA⁹

Nikoleta Hristova, MSc

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse “Angel Kanchev”

Tel: +359 877309115

E-mail: n.hristova2508@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse “Angel Kanchev”

Tel: +359 884109719

E-mail: rivanova@uni-ruse.bg

***Abstract:** This paper examines the potential of the dynamic mathematical software **GeoGebra** for solving and visualizing equations and inequalities. The aim is to demonstrate how the graphical approach supports understanding of algebraic relations and develops key competencies in learners. Algorithms for solving linear and quadratic equations and inequalities are presented, as well as examples illustrating the application of GeoGebra to practical mathematical problems. Special attention is given to the relationship between analytical and graphical solutions, which enhances visual and logical thinking. In conclusion, GeoGebra is emphasized as an effective tool for interactive mathematics education.*

***Key words:** GeoGebra, inequalities, graphical solution, mathematics education.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Изучаването на уравнения и неравенства е основен компонент в училищния курс по математика, като представлява фундаментална част от алгебричната подготовка на учениците. Сред тях особено значимо място заемат квадратните уравнения и неравенства, понеже върху тях се базират редица по – сложни математически понятия. Те служат както за изграждане на основни знания и умения, така и за развитие на логическо мислене, аналитични способности и математическо моделиране на реални ситуации. Квадратните зависимости намират широко приложение и в други научни дисциплини – физика, химия, инженерни специалности, икономика и др.

Въпреки тяхната фундаменталност, за голяма част от учениците аналитичните методи за решаване на квадратни уравнения и неравенства представлява предизвикателство. Причина за това е абстрактния характер на алгебричните преобразувания и в трудността да се визуализира поведението на квадратната функция. Липсата на връзка между аналитичния запис и неговата геометрична интерпретация често води до механично прилагане на правила вместо до истинско разбиране.

Динамичният математически софтуер **GeoGebra** предоставя ефективно решение за преодоляване на тези трудности. Софтуерът съчетава алгебра, геометрия и математически анализ, което позволява на учащите да наблюдават в реално време как аналитичните промени влияят върху графиката. Това улеснява разбирането на корените, знаците в интервалите, върха на параболата и поведението на квадратната функция.

Използването на **GeoGebra** не само подпомага решаването на конкретни задачи, но развива умения за изследване, визуализация и интерпретация на математически модели. Този подход е в

⁹ Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2025 г. в секция „Образование – изследвания и иновации” с оригинално заглавие на български език: РЕШАВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА С ИЗПОЛЗВАНЕ НА GEOGEBRA.

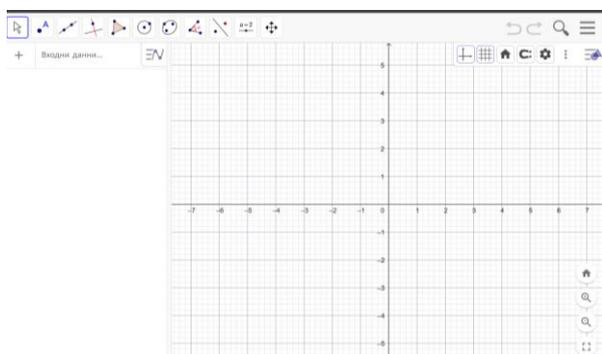
пълно съответствие със съвременните тенденции на обучението по математика като насърчава учениците към активно участие в учебния процес.

Настоящата статия представя възможностите на **GeoGebra** при решаване на линейни, квадратни и неравенства от по – висока степен, като се сравняват аналитичните и графичните методи, и демонстрира практическите приложения на математическия софтуер.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Очакваните резултати от подготовката на учениците по темата са: разпознават видовете неравенства; използват различни методи за решаването им; изобразяват решенията графично или чрез метод на интервалите; анализират и тълкуват решенията; аргументират решенията ясно и логично; прилагат знанията си в практически задачи.

Интерфейсът на **GeoGebra** включва алгебричен изглед, графичен прозорец и входен ред, които работят заедно и позволяват едновременно алгебрично и визуално представяне на задачите. Чрез въвеждане на израза във входния ред **GeoGebra** автоматично изобразява графиката и показва решението в двата изгледа.



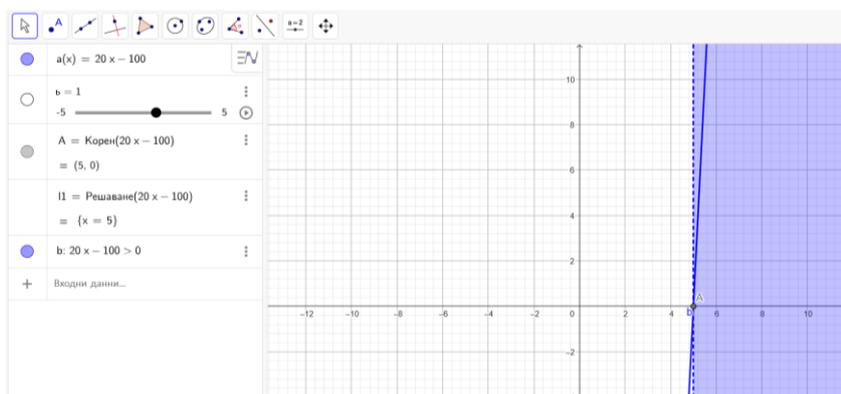
Фиг. 1. Интерфейс на GeoGebra

- ❖ Стартиране на GeoGebra.
- ❖ Задава се режим Algebra & Graphics.
- ❖ Въвежда се функцията $f(x) = \dots$
- ❖ Чрез натискане на бутон "Enter" програмата изчертава функцията.
- ❖ Въвежда се неравенството $f(x) < 0$; $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ или $f(x) \geq 0$.
- ❖ Програмата оцветява областта, в която неравенството е вярно изпълнено.

Фиг. 2. Алгоритъм за решаване на неравенства

Задача 1. Решете уравнението $20x - 100 = 0$ и неравенството $20x - 100 > 0$ (Паскалева, 2024).

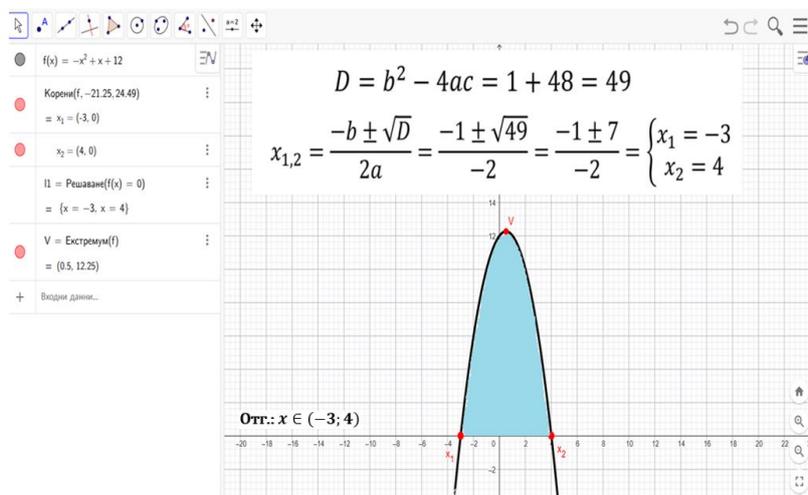
След въвеждане на функцията и натискане на бутона „Enter“, **GeoGebra** автоматично изчертава графиката ѝ в координатната система. Следващата стъпка е да се зададе типът на задачата – уравнение или неравенство. При използване на командата „Root (f)“ **GeoGebra** намира корена на уравнението и визуализира точката на пресичане на графиката на функцията с оста Ox . За линейното неравенство се използва командата „Solve ($20x - 100 > 0, x$)“, чрез която се определя и оцветява интервала, в който функцията приема положителни стойности.



Фиг. 3. Линейно уравнение и линейно неравенство, решени с използване на GeoGebra

Задача 2. Решете неравенството: $-x^2 + x + 12 > 0$ (Паскалев, 2024).

Показано е аналитично и графично решение на неравенството. GeoGebra автоматично определя корените на неравенството и показва интервала, в който параболата е над оста O_x . Полученото аналитично решение напълно съвпада с графичното решение.



Фиг. 4. Аналитично и графично решение на квадратно неравенство

Задача 3. Решете неравенството: $x(x + 5)(x - 8)(1 - x) < 0$ (Паскалев, 2024).

Решение: Неравенството е разложено на множители, които се приравняват на нула, за да се намерят корените му.

$$x = 0; x + 5 = 0; x - 8 = 0 \text{ и } 1 - x = 0,$$

или корените, които ще определят числовите интервали ще са корените на уравненията.

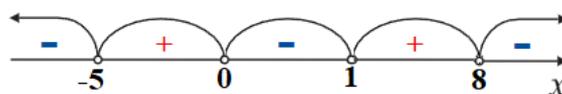
$$x = 0; x = -5; x = 8 \text{ и } x = 1$$

Таблично представяне – таблицата се попълва чрез заемане на стойност в съответния интервал и заместване на мястото на неизвестната величина.

Таблица 1. Таблично представяне на метод на интервалите

x	$-\infty$	-5	0	1	8	$+\infty$
x		-	-	+	+	+
$x + 5$		-	+	+	+	+
$x - 8$		-	-	-	-	+
$1 - x$		+	+	+	-	-
$x(x + 5)(x - 8)(1 - x)$		-	+	-	+	-

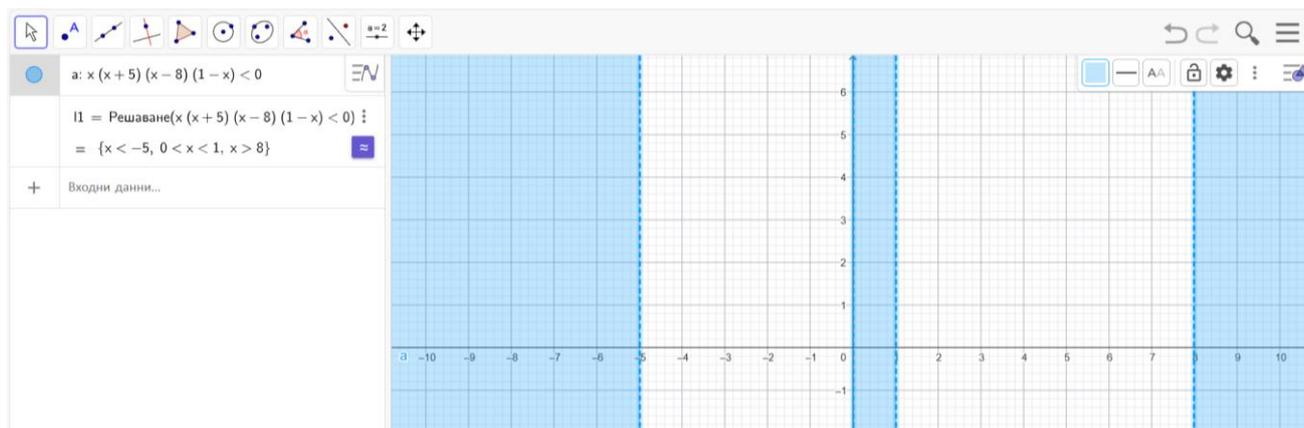
Представяне чрез числови интервали – знаците се вземат от таблицата, но може и да се определи знака в най-десният интервал от произведението на старшите коефициенти, или $(+1)(+1)(+1)(-1) = (-1)$. Следователно знакът в най-десният интервал е „-“, а в следващите се редуват алтернативно, защото няма корен на четна степен.



Фиг. 5. Графично представяне на метод на интервалите

След определяне на знаците вече може да се запише решението на неравенството $x(x + 5)(x - 8)(1 - x) < 0$. Неравенството е строго по – малко от 0, следователно решението ще е обединението на интервалите, в които има знак „-“.

Отг.: $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 1) \cup (8; +\infty)$



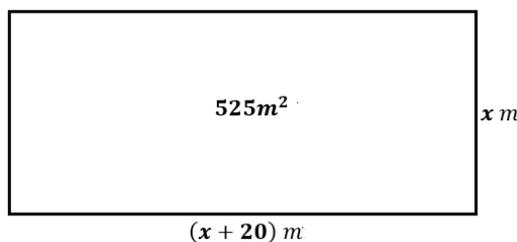
Фиг. 6. Графично решение чрез GeoGebra

Сравнявайки аналитичното и графичното решение на неравенството се забелязва, че графиката ясно показва в кои интервали функцията е отрицателна, което спестява време и значително улеснява анализа на решението.

Практически задачи, решени с помощта на GeoGebra

Задача 4. (НВО 10 клас, 2023г./зад.16В). Едната страна на правоъгълен парцел е с $20m$ по-дълга от другата. Колко метра мрежа ще са необходими за неговото заграждане, ако площта му е $525m^2$?

Решение: Нека едната страна на парцела да е $x\ m$, следователно другата ще е $(x + 20)\ m$:



Фиг. 7

От формулата за намиране лице на правоъгълник $S = a \cdot b$ следва:

$$(x + 20)x = 525$$

$$x^2 + 20x - 525 = 0$$

Получи се квадратно уравнение. За решаване на уравнението се използва кратката формула за намиране на дискриминантата и корените на уравнението $\Rightarrow k = \frac{b}{2} = 10$

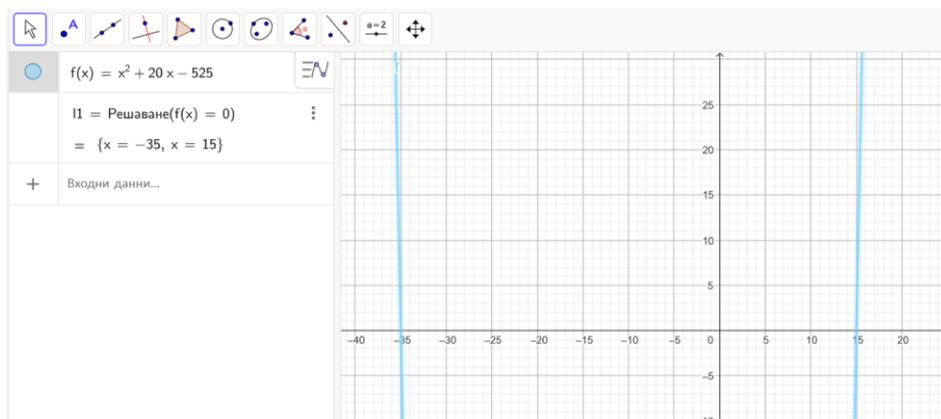
$$D = k^2 - ac = 10^2 - (-525) = 100 + 525 = 625 = 25^2$$

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{D} = -10 \pm \sqrt{25^2} = -10 \pm 25 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = -35 \end{cases}$$

Понеже в задачата се търси дължина това означава, че $x_2 = -35$ не е решение \Rightarrow едната страна на парцела е $15m$, а другата ще бъде $(x + 20) = 15 + 20 = 35m$.

За заграждане на парцела с мрежа трябва да се приложи формулата за намиране обиколка на правоъгълник, или: $P = 2a + 2b = 2(a + b) = 2(15 + 35) = 100$.

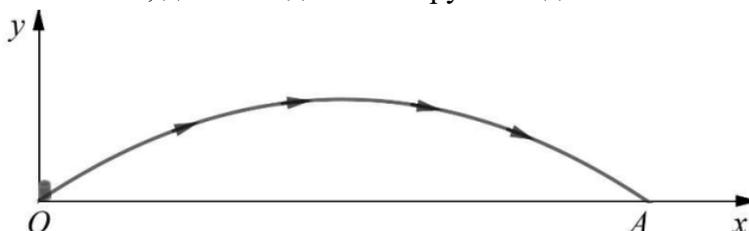
Отг.: $100\ m$



Фиг. 8. Графично решение

Задача 5. (НВО 10 клас, 2025г./зад.7). Пръскачка полива с вода тревна площ в градина. Струята на водата описва част от парабола с уравнение $g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x, x > 0$ както е показано на фигура? Кое е най-голямото разстояние OA , до което достига струята вода?

- А) 9 m
- Б) 6 m
- В) 3 m
- Г) 2 m



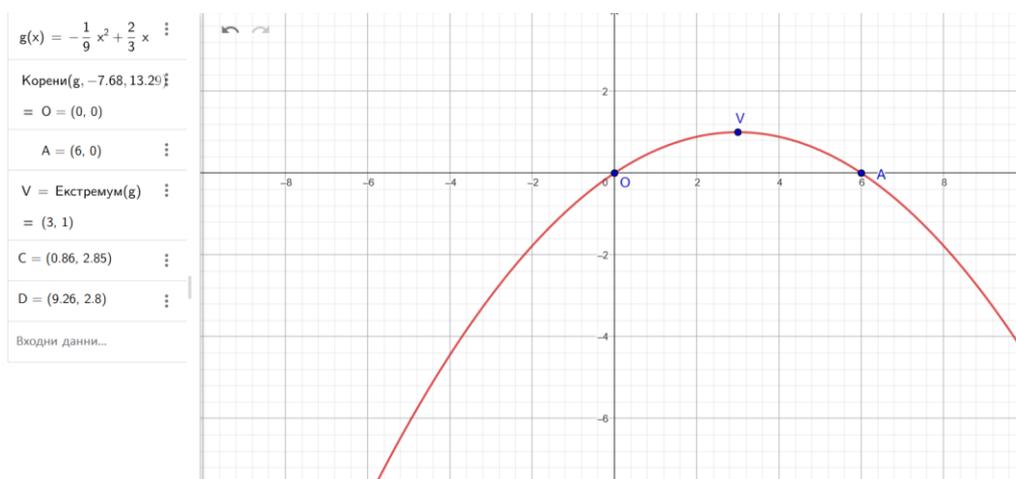
Фиг. 9

Функцията $g(x)$ моделира траекторията на водната струя на пръскачката. При аритметичното решение на задачата е достатъчно да се намери върха на параболата. През него се построява оста на симетрия, която ще пресече абсцисата ос Ox точно в средата на разстоянието OA .

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{2}{3}}{2 \left(-\frac{1}{9}\right)} = \frac{2}{3} : \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3$$

Следователно разстоянието OA ще е равно на $2 \cdot x_V = 2 \cdot 3 = 6m$.

Верен отговор: **Б**

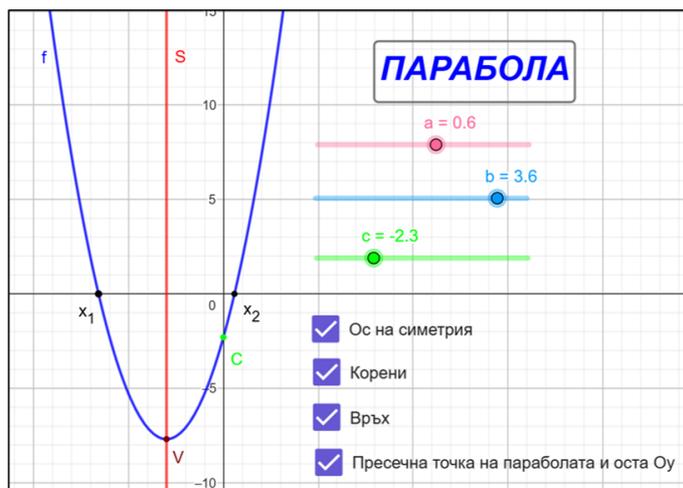


Фиг. 10. Графично решение

Изследване на квадратна функция чрез GeoGebra

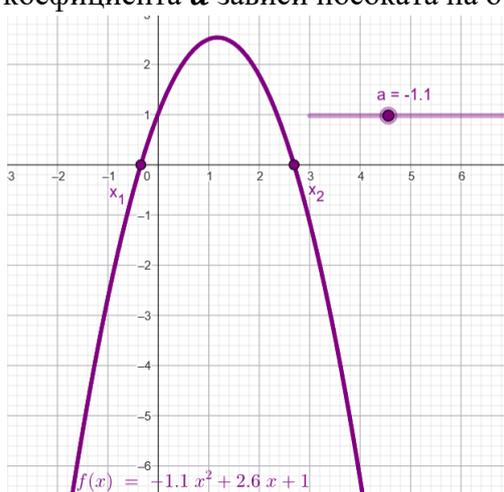
GeoGebra позволява динамично изследване на квадратна функция от вида

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Промяната на параметрите показва как графиката се променя:

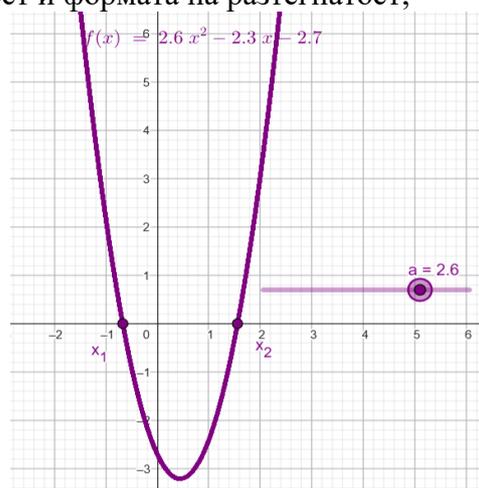


Фиг. 11. Изследване на квадратна функция

- от коефициента a зависи посоката на отвореност и формата на разтегнатост;

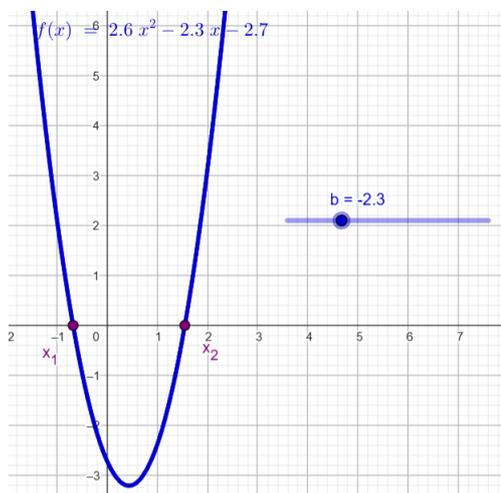


Фиг. 12. $a < 0$

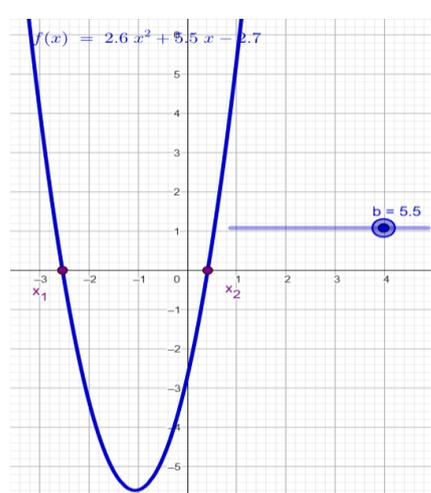


Фиг. 13. $a > 0$

- от коефициента b зависи местоположение на върха на параболата и нейното хоризонтално изместване.



Фиг. 14. $b < 0$



Фиг. 15. $b > 0$

- коефициентът c показва пресечната точка на параболата с ординатната ос, а променяйки неговите стойности тя има вертикално изменение спрямо абсцисната ос.

Придобити компетентности след изучаване на видове уравнения и неравенства, и програмнен продукт GeoGebra:

- Разбиране връзката между аналитично и графично представяне;
- Самостоятелно решаване на линейни и нелинейни уравнения и неравенства;
- Създаване и интерпретация на графични модели;
- Развитие на дигитални умения и работа с динамичен софтуер;
- Умения за представяне и аргументиране на математически решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

GeoGebra доказва своята ефективност като инструмент за решаване и визуализация решенията на уравнения и неравенства. Софтуерът подпомага както изчисленията, така и концептуалния аспект на обучението, като превръща абстрактните математически зависимости в достъпни визуални модели. Графичната интерпретация улеснява разбирането на понятията: корени, интервали и знак на интервал, поведение на функция. Съчетанието на аналитичен и графичен подход развива критичното мислене и умения за математическо моделиране – ключови компетентности в съвременното обучение по математика.

БЛАГОДАРНОСТИ

Това изследване е подкрепено от проект 2025-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Hristova, N., scientific advisor Ralitsa Vasileva-Ivanova, Square equations and inequalities in the school mathematics (2025), master’s degree thesis, University of Ruse, (*Оригинално заглавие:* Дипломна работа Квадратни уравнения и неравенства в училищния курс по математика, Русенски университет (2025)).

Paskalev, G., M. Alashka, R. Alashka (2024). Mathematics Textbook for 9th Grade, Archimedes. (*Оригинално заглавие:* Паскалев Г., Алашка М., Алашка Р., Математика за 9. клас, Архимед, 2024, с. 50–61 и 142–157).

Paskaleva, Z., M. Alashka, P. Paskalev, R. Alashka (2024). Mathematics Textbook for 8th Grade, Archimedes. (*Оригинално заглавие:* Паскалева З., Алашка М., Паскалев П., Алашка Р., Математика за 8. клас, Архимед, 2024, с. 78-123.)

<https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Retrieved (26.11.2025).

https://www.mon.bg/nfs/2023/06/nvo-10klas_math_16.06.2023.pdf. Retrieved (26.11.2025).

https://www.mon.bg/nfs/2025/06/nvo10-math_16062025.pdf. Retrieved (26.11.2025).