

FRI-2G.307-1-ERI-08

DEVELOPING GEOGEBRA WORKSHEETS TO SUPPORT STEREOMETRY EDUCATION FOR 6TH GRADE ¹⁰

Galya Stefanova, MSc

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse “Angel Kanchev”

Tel: +359 898417702

E-mail: galia.dianova@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Ralitsa Vasileva-Ivanova, PhD

Department of Mathematics

Faculty of Natural Sciences and Education

University of Ruse “Angel Kanchev”

Tel: +359 884109719

E-mail: rivanova@uni-ruse.bg

***Abstract:** This article presents the development of GeoGebra worksheets intended to support the teaching of stereometry in Grade 6. The objective of the work is to create interactive educational resources that facilitate the visual perception and conceptual understanding of three-dimensional geometric figures, while promoting active student engagement. GeoGebra, used as a dynamic environment for modelling and exploring geometric objects, enables the implementation of an inquiry-based approach in which students independently detect and verify geometric relationships. The proposed materials highlight the potential of interactive technologies to enhance students’ motivation and learning outcomes, and to assist teachers in adopting innovative pedagogical practices in mathematics education.*

***Key words:** GeoGebra, stereometry, interactive learning, dynamic geometry, mathematics education, inquiry-based learning, 3D visualization, educational technology.*

ВЪВЕДЕНИЕ

В условията на съвременното образователно пространство интегрирането на дигитални технологии се утвърждава като ключов фактор за повишаване на качеството и ефективността на учебния процес. Особено в обучението по математика, използването на интерактивни софтуерни среди като GeoGebra предоставя широки възможности за визуализация и експериментиране с математически обекти и зависимости. Това е от особено значение при изучаването на стереометрия в 6 клас, където формирането на пространствено мислене представлява едно от основните предизвикателства за учениците.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Основни трудности при усвояването на стереометричните понятия

Обучението по стереометрия в прогимназиален етап поставя пред учениците редица предизвикателства, свързани с особеностите на пространственото мислене и абстрактния характер на стереометричните понятия. Възприемането и осмислянето на тримерни обекти изисква специфични когнитивни умения, които все още се формират в тази възрастова група. В резултат на това се наблюдават няколко характерни затруднения в процеса на усвояване на стереометричните понятия.

На първо място, ограниченото пространствено въображение. На второ място, често се наблюдава неяснота при възприемането на пространствените зависимости между отделните

¹⁰ Докладът е представен на конференция на Русенския университет на 25 октомври 2025 г. в секция „Образование – изследвания и иновации” с оригинално заглавие на български език: РАЗРАБОТВАНЕ НА GEOGEBRA РАБОТНИ ЛИСТОВЕ ЗА ПОДПОМАГАНЕ ОБУЧЕНИЕТО ПО СТЕРЕОМЕТРИЯ В 6 КЛАС.

елементи – върхове, ръбове и стени. Съществено затруднение представлява и интерпретацията на чертежи и проекции на пространствени фигури. Двумерното представяне на тримерни обекти изисква умения за анализ и визуално преобразуване, които невинаги са достатъчно развити в 6. клас. Не на последно място, липсата на достатъчна мотивация и отсъствието на връзка с реалния свят оказват негативно влияние върху интереса и постиженията на учениците.

Преодоляването на изброените затруднения изисква използване на интерактивни подходи, които подпомагат изграждането на пространствено мислене чрез активна ангажираност на учениците. В този контекст приложението на GeoGebra като динамична среда за визуализация и моделиране на тримерни обекти се явява особено ефективно средство за осмисляне на стереометричните зависимости и за повишаване на интереса към изучаването на геометрията.

Методика на разработването на GeoGebra работни листове

На първия етап е извършен анализ на учебното съдържание по стереометрия, заложено в програмата за 6. клас. По – конкретно това е идентифициране на основните теми, подходящи за визуализация чрез GeoGebra – призма, пирамида, цилиндър, конус и кълбо.

Вторият етап включва планиране на структурата и съдържанието на работните листове. За всяка тема са определени ясни учебни цели и очаквани резултати, съобразени с държавните образователни стандарти. Работните листове са проектирани така, че да осигуряват балансирано съчетание между демонстрационен и изследователски подход. Всеки лист съдържа:

- визуален модел на геометричен обект, създаден в тримерната среда на GeoGebra;
- набор от интерактивни контроли (плъзгачи, бутони, отметки), чрез които учениците могат да променят параметрите на фигурата;
- въпроси и задачи за наблюдение, анализ и формулиране на изводи;
- инструкции за самостоятелна работа.

На третия етап е осъществена техническата реализация на материалите в софтуерната среда GeoGebra. В процеса на разработка са използвани възможностите за динамично моделиране, анимация и промяна на обекти в реално време. Работните листове са оформени така, че да могат да бъдат използвани както в присъствена, така и в дистанционна форма на обучение.

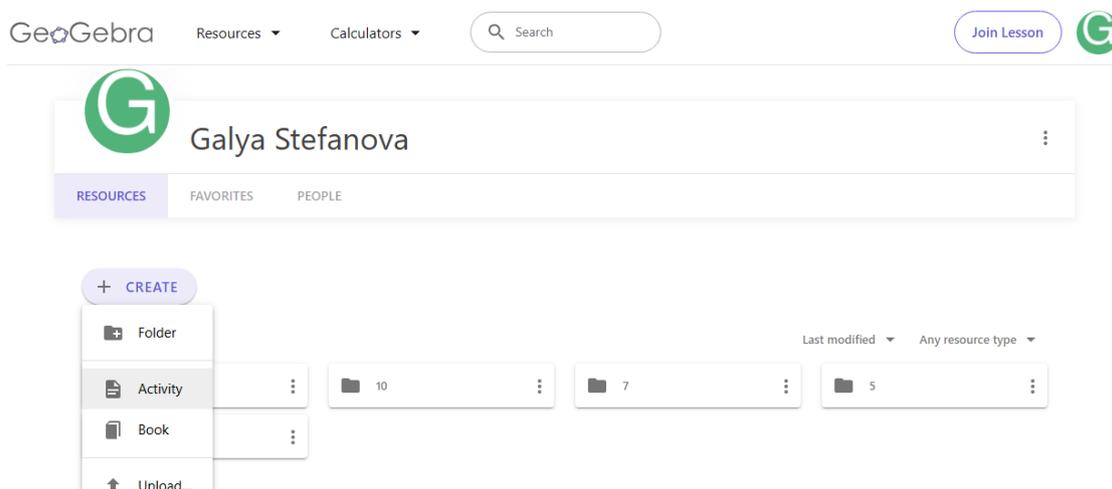
Четвъртият етап включва пилотно прилагане на разработените материали в реална учебна среда. Учениците работят индивидуално и в малки групи, като изследват свойствата на геометричните тела чрез манипулиране на интерактивните модели. Учителят изпълнява ролята на фасилитатор, насочващ процеса на откриване и обсъждане на резултатите.

В заключителната фаза е извършен анализ на резултатите и наблюденията от прилагането на работните листове.

Алгоритъм за разработване на GeoGebra работни листове

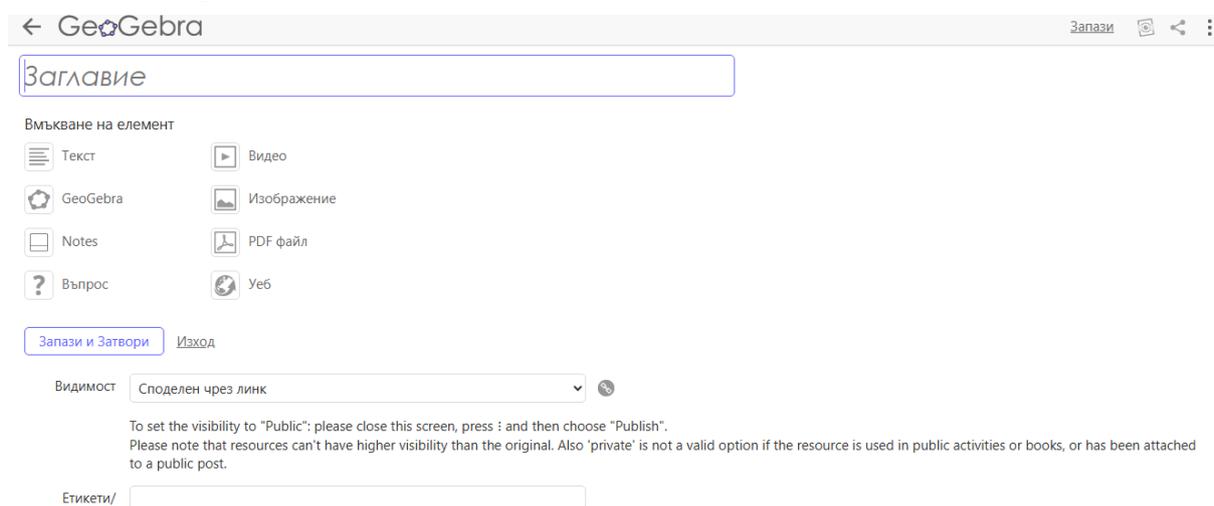
Основните стъпки:

1. Влиза се с потребителско име и парола в сайта <https://www.geogebra.org/>
2. След отваряне на личния профил в GeoGebra, от бутон *CREATE* се избира създаване на нова дейност/нов работен лист – *Activity* (фиг. 1)



Фиг. 1. Създаване на нов работен лист

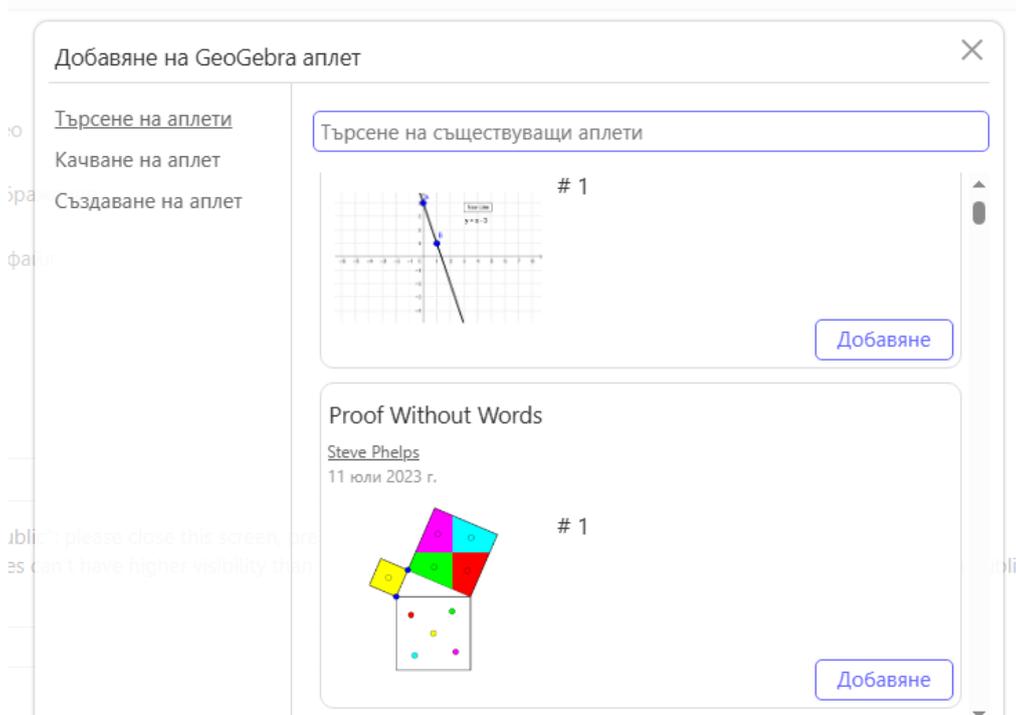
3. С отварянето на новия работен лист има възможност да се запише заглавие и да се вмъкне елемент. (фиг. 2)



Фиг. 2. Озаглавяване на работния лист и възможност за избор на въпрос

4. Възможност за избор как да се зададе въпроса към учениците – текст, видео, GeoGebra аplet, изображение, бележки, PDF файл, въпрос и вмъкване на линк към интернет страница.

Най – впечатляващото за учениците е да имат чертеж към съответния въпрос и да могат да променят параметрите му с плъзгачи или бутони. Това се случва, като се вмъкне GeoGebra аplet. За целта той трябва да е създаден предварително от нас или може да се използват ресурсите на приложението. След, като е избран аplet се копират цифрите след наклонената черта от интернет адреса му. Поставят се в прозореца, показан на фиг. 3 и се добавя към съответния въпрос. След като работния лист е готов се натиска бутон *Запази*.



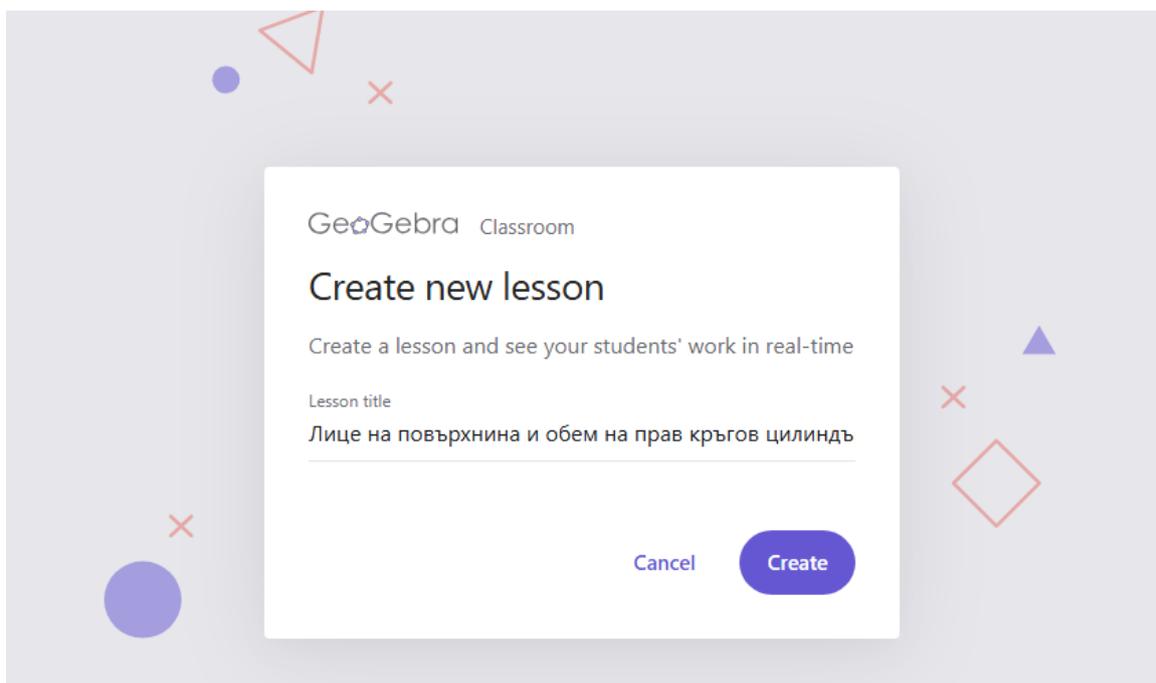
Фиг. 3. Добавяне на GeoGebra аплет

5. Създаване и споделяне на работен лист.

Създаването на работен лист е с натискане на бутона GeoGebra Classroom (фиг. 4.) и Create (фиг. 5).

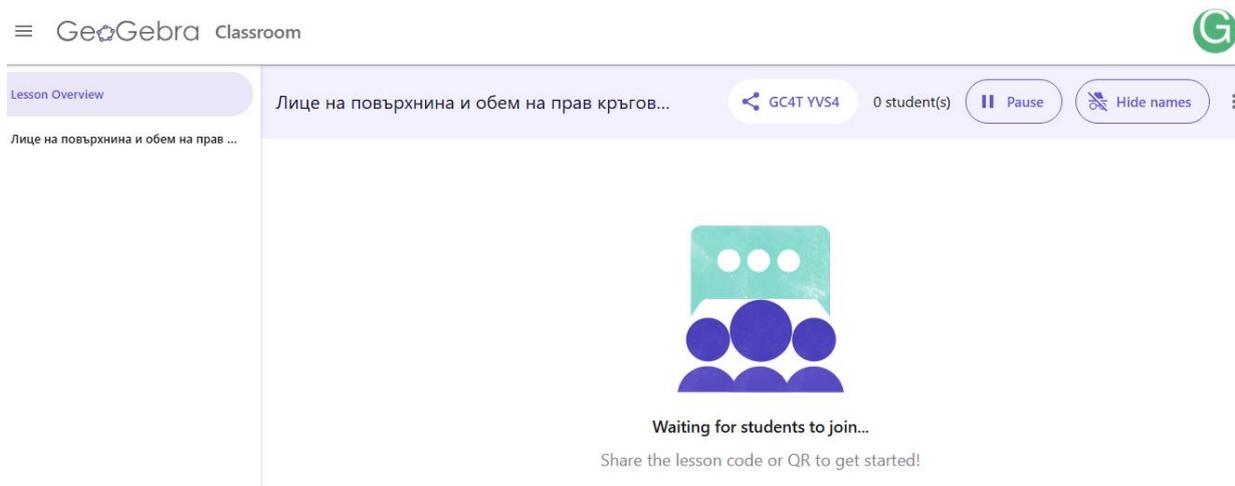


Фиг. 4. Създаване на работен лист

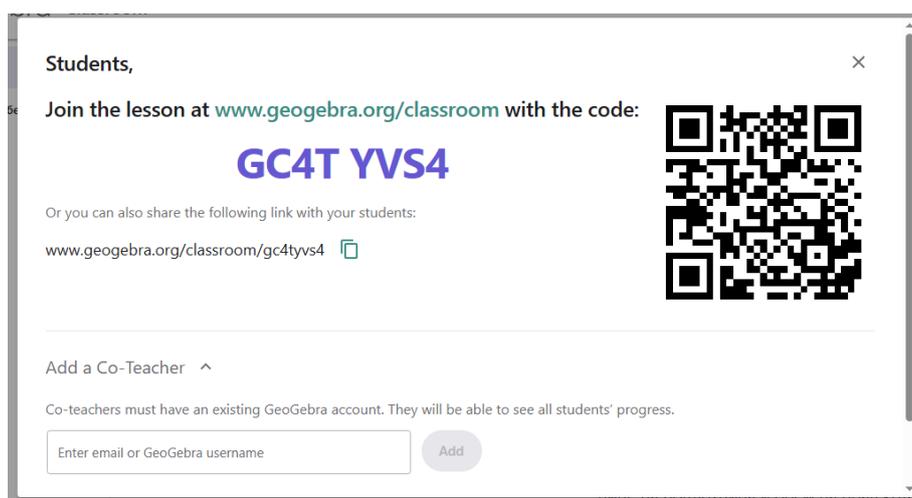


Фиг. 5. Създаване на GeoGebra работен лист

6. Споделяне с учениците – на фиг. 6 е показан готов работен лист, който чака да бъде споделян с учениците и да се наблюдава в реално време тяхната работа. Може да се споделя по няколко начина – 8 буквен и цифрен код, QR code, и линк, показани на фиг. 7. Платформата позволява за добавяне на учител, за скриване на имената на децата и др. възможности.

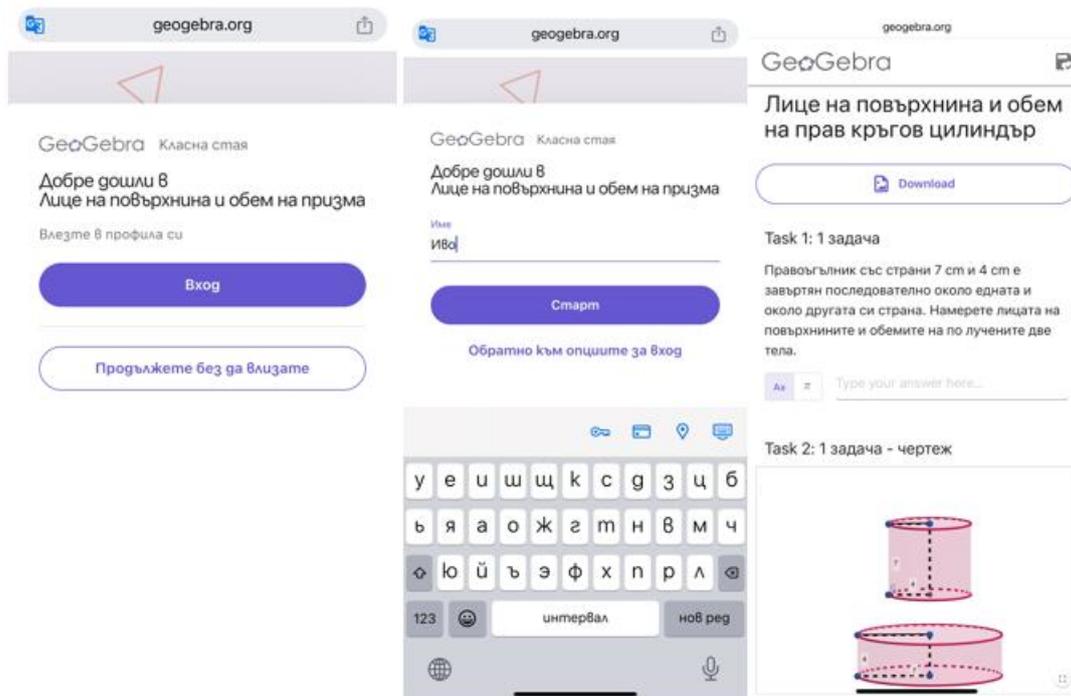


Фиг. 6. Споделяне на работен лист с ученици



Фиг. 7. Споделяне на работни листи

7. След като учителят е споделил работния лист, на учениците се визуализират следните прозорци показани на фиг. 8 и могат да започнат работа (Паскалева и колектив, 2023).



Фиг. 8. Работни прозорци, които се визуализират на учениците

Работен лист – Лице на повърхнина и обем на пирамида (фиг. 9÷фиг. 13)

GeoGebra

All changes saved

Лице на повърхнина и обем на пирамида

Download

1. задача

Намерете броя на върховете на шестоъгълна пирамида.

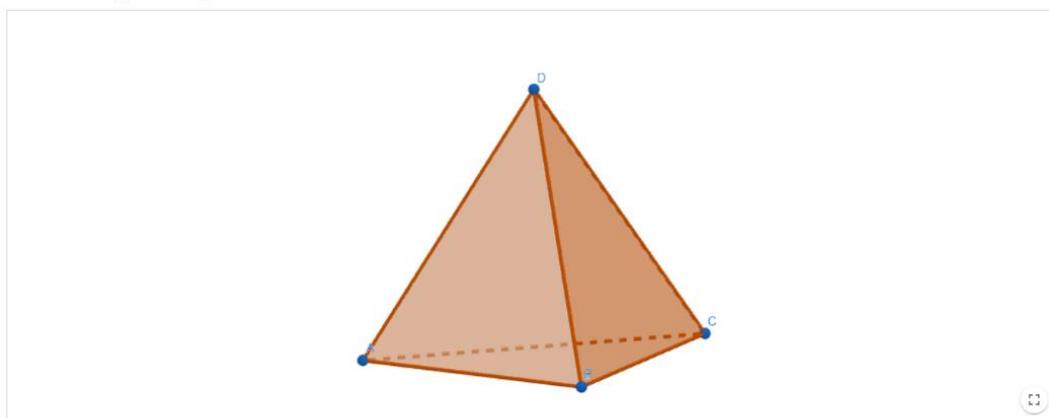
Answer input field with a text prompt 'Type your answer here...' and a small icon.

2. задача

Намерете лицето на околната повърхнина на правилна триъгълна пирамида с основен ръб 5 cm и апотема 4 cm.

Answer input field with a text prompt 'Type your answer here...' and a small icon.

2. задача - чертеж



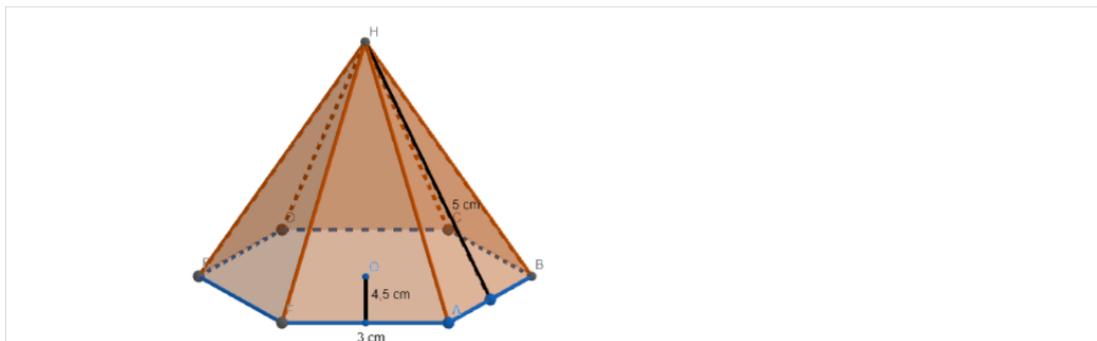
Фиг. 9. Чертеж към задача 2 от работния лист

3. задача

Правилна шестоъгълна пирамида има основен ръб 3 cm, апотема на основата 4,5 cm и апотема на пирамидата 5 cm. Намерете лицето на повърхнината на тази пирамида.

Аа π Type your answer here...

3. задача - чертеж



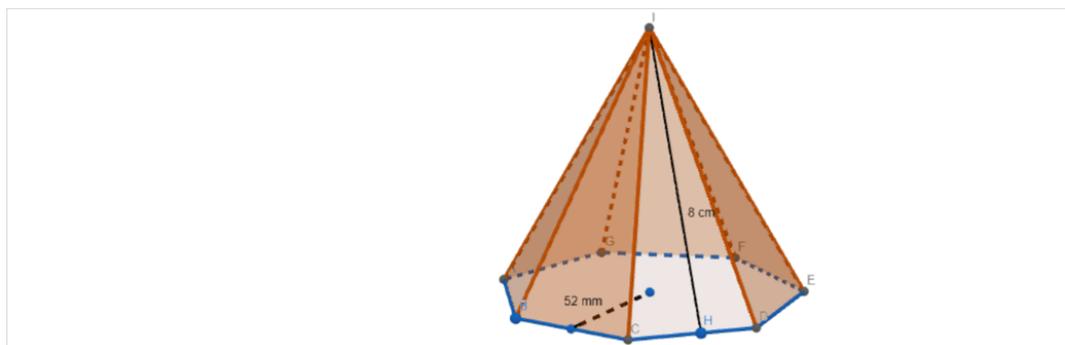
Фиг. 10. Чертеж към задача 3 от работния лист

4. задача

Правилна седмоъгълна пирамида има апотема 8 cm и лице на околната повърхнина $1,4 dm^2$. Намерете лицето на повърхнината, ако апотемата на основата е 52 mm.

Аа π Type your answer here...

4. задача - чертеж



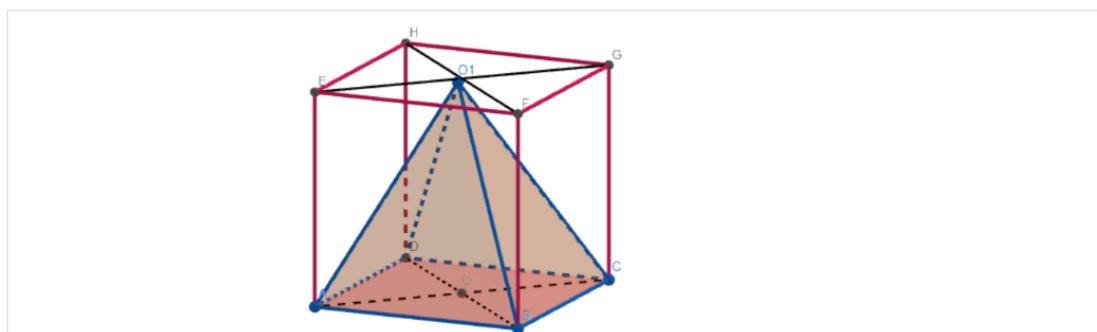
Фиг. 11. Чертеж към задача 4 от работния лист

5. задача

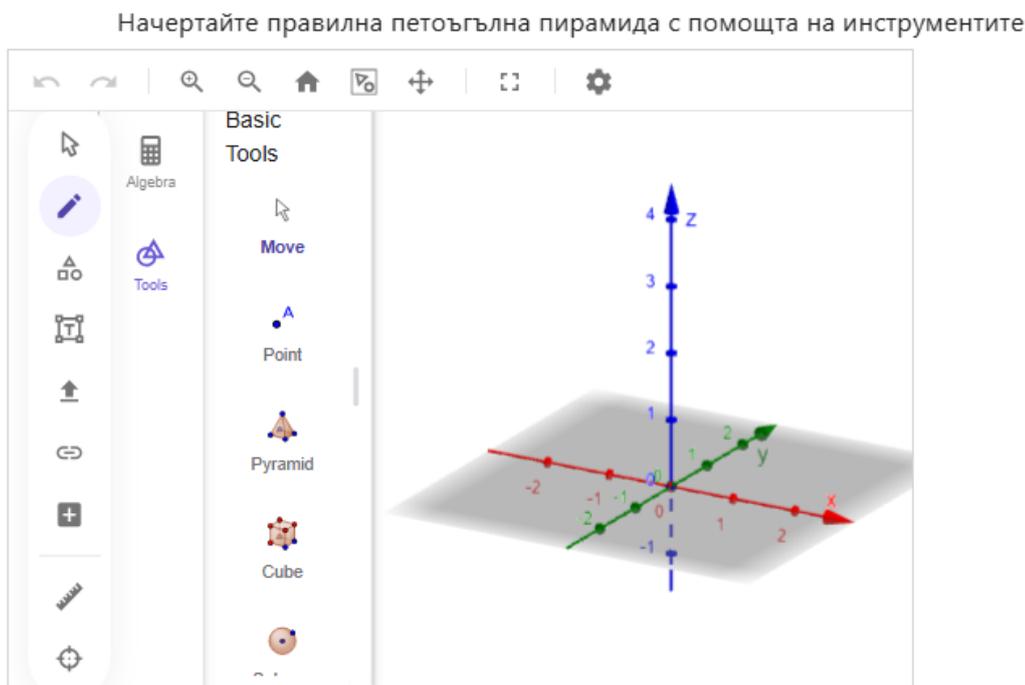
Кубът $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ има основен ръб 6 cm. Намерете обема на пирамидата $ABCD O_1$, ако O_1 е пресечната точка на диагоналите на горната основа. Каква част е този обем от обема на куба?

Аа π Type your answer here...

5. задача - чертеж



Фиг. 12. Чертеж към задача 5 от работния лист



Домашна работа

Лицето на околната повърхнина на правилна четириъгълна пирамида е 80cm^2 , а обемът ѝ е 64cm^3 . Ако височината ѝ е $\frac{3}{5}$ от апотемата, намерете основния ръб на тази пирамида.

Aa π Type your answer here...

CHECK MY ANSWER

Фиг. 13. Чертеж към задачата за домашна работа от работния лист

Линкове към работните листове (Нинкова и колектив, 2023; Фурнаджиев и колектив, 2024):

- Намиране лице на повърхнина и обем на права призма - <https://www.geogebra.org/classroom/buavpdwv>
- Намиране лице на повърхнина и обем на конус - <https://www.geogebra.org/classroom/bnwydbsk>
- Намиране лице на повърхнина и обем на цилиндър - <https://www.geogebra.org/classroom/knsbztv>
- Намиране лице на повърхнина и обем на пирамида - <https://www.geogebra.org/classroom/qgfdcybn>
- Намиране лице на повърхнина и обем на сфера и кълбо - <https://www.geogebra.org/classroom/kswcszg7>

Апробиране

Апробирането на разработените GeoGebra работни листове има за цел да се оцени тяхната ефективност и приложимост в реална учебна среда. Тя е осъществена в рамките на избираемите учебни часове по математика в 6. клас, като обхваща група от ученици с разнородни постижения по математика.

Учениците работят както индивидуално, така и в малки екипи, като извършват наблюдения, манипулират параметрите на тримерните модели и формулират собствени изводи относно геометричните зависимости (фиг. 14) Учителят подпомага процеса на самостоятелно откриване и дискусия, без да предоставя готови решения.



Фиг. 14. Работа на ученик в час, който използва GeoGebra и пресмята в тетрадка

Работните листове са разработени за избираемите учебни часове по математика в VI клас. В началото на часа учителят споделя линк към съответния работен лист в групата на класа. Учениците отварят линка, вписват имената си и започват да работят по задачите.

Работата им се осъществява основно чрез мобилните телефони, като пресмятанията извършват в тетрадките си. Учителят наблюдава в реално време изпълнението на задачите от всички ученици на своя компютър и следи за допуснати грешки. При откриване на грешка той я коментира с целия клас, без да назовава името на ученика, който я е допуснал, и проследява дали съответният ученик е направил необходимата корекция. Учениците могат да влизат многократно в работния лист, както и да го свалят на своето устройство и при необходимост да го разпечатат.

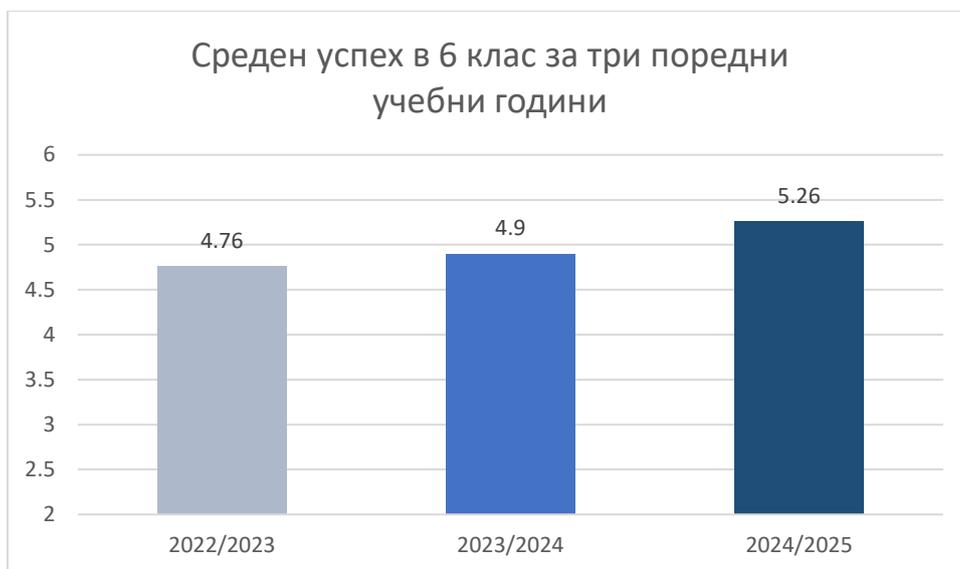
Наблюденията по време на апробацията показват висока степен на ангажираност от страна на учениците. Те проявяват любопитство към възможностите на GeoGebra и активно участват в изследването. Наблюдава се положителен ефект и при учениците, които традиционно срещат затруднения със стереометричните задачи – благодарение на визуализацията и възможността за интерактивна манипулация те по-лесно постигат образователните резултати.

Апробирането показва също, че GeoGebra предоставя условия за диференциран подход в обучението – по-напредналите ученици изследват по-сложни зависимости и формулират хипотези, докато останалите работят с основните понятия и взаимоотношения. Учителят може лесно да регулира трудността на задачите и да адаптира темпото на работа спрямо нуждите на класа.

Резултати

Анализът на резултатите показва, че използването на GeoGebra работни листове оказва положително влияние върху процеса на усвояване на знанията по стереометрия в 6. клас. Учениците демонстрират повишено разбиране на пространствените зависимости и по-точно разпознаване на елементите на геометричните тела. Значителна част от участниците споделят, че визуализацията им помага „да си представят по-добре фигурите“ и „да видят това, което не се вижда на чертежа“.

Оценките на ученици от 6 клас са сравнени за три поредни години. През 2023/2024 г. не е използван софтуерът GeoGebra, а през следващата година използването на платформата е въведено частично. През третата година изцяло учителят е работил на GeoGebra в раздел *Стереометрия*. Според диаграмата показана на фиг. 15 се наблюдава повишение на средния успех на класа през трите години.



Фиг. 15. Диаграма на средния успех в 6 клас

Отчетено е повишаване на учебната мотивация и активността. Учениците проявяват интерес към експериментиране с различни параметри и се включват по-активно в обсъждането на резултатите. Урокът придобива изследователски характер, при който учениците откриват закономерности чрез наблюдение и логическо мислене, вместо да запаметяват готови правила.

Освен това се наблюдава намаляване на типичните грешки, свързани с интерпретацията на геометричните тела и взаимното разположение на техните елементи. Учениците разпознават по-лесно скритите ръбове и връзките между върховете и стените на телата.

От гледна точка на учителя, GeoGebra се утвърждава като ефективен инструмент за организация на учебния процес, позволяващ гъвкаво представяне на съдържанието и бърза адаптация към различни учебни ситуации.

Въз основа на анализа могат да се формулират следните основни изводи:

- Използването на GeoGebra подпомага пространственото мислене и улеснява разбирането на тримерни обекти;
- Интерактивните визуализации повишават ангажираността и мотивацията на учениците;
- GeoGebra създава условия за индивидуализиране на обучението и подкрепя прилагането на компетентностния подход.

Програмата може да бъде ефективно интегрирана както в присъствена, така и в дистанционна форма на обучение.

Учителите възприемат GeoGebra като достъпен и полезен ресурс за модернизирание на уроците по математика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработените GeoGebra работни листове представляват ефективен педагогически инструмент, който съчетава научна достъпност, визуална интерактивност и практическа приложимост. Тяхното използване в обучението по стереометрия не само подобрява резултатите на учениците, но и допринася за развитието на ключови компетентности, като критическо мислене, дигитална грамотност и умения за самостоятелно учене.

Интегрирането на GeoGebra в учебния процес може да се разглежда като важна стъпка към модернизацията на математическото образование и повишаване на неговата ефективност и привлекателност (Василева & Василева-Иванова, 2024).

БЛАГОДАРНОСТИ

Това изследване е подкрепено от проект 2025-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенския университет.

REFERENCES

Furnadziev, I, R. Radkov (2024) Early Preparation for the National External Assessment, 6th grade, IDF ACADEMY (**Оригинално заглавие:** *Фурнаджиев И., Радков Р. „Ранна подготовка за НВО“, 6. клас, изд. IDF ACADEMY, 2024*)

Ninkova, P., M. Lilkova, I. Sharkova, St. Stavreva-Neycheva (2023). *Mathematics Textbook for 6th Grade*, Prosveta Press. (**Оригинално заглавие:** *Нинкова П., М. Лилкова, И. Шаркова, Ст. Ставрева-Нейчева, Математика за 6. клас, Просвета, 2023, с. 48–127*)

Paskaleva, Z., M. Alashka, P. Paskalev, R. Alashka (2023). *Mathematics Textbook for 6th Grade*, Archimedes. (**Оригинално заглавие:** *Паскалева З., Алашка М., Паскалев П., Алашка Р., Математика за 6. клас, Архимед, 2023, с. 78–123*)

Stefanova, G., scientific advisor Ralitsa Vasileva-Ivanova, Integrating the mathematical software GeoGebra into the teaching of stereometry in 6th grade (2025), master’s degree thesis, University of Ruse, (**Оригинално заглавие:** *Дипломна работа Интегриране на математическия софтуер GeoGebra в обучението по стереометрия в 6. клас, Русенски университет (2025)*)

Vasileva I., R. Vasileva-Ivanova (2024). Developing geometry problems for 7-th grade by seventh graders *proceedings of university of ruse*, 67-73 (**Оригинално заглавие:** *Василева И., Р. Василева-Иванова (2024). Разработване на задачи по геометрия за 7-ми клас от седмокласници. Сборник доклади на Русенски университет, 67-73*)

<https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Retrieved (22.11.2025)