

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

UNIVERSITY OF RUSE “Angel Kanchev”
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ “Ангел Кънчев”

BSc, MSc and PhD Students & Young Scientists
Студенти, докторанти и млади учени

PROCEEDINGS

Volume 61, book 6.5.
Financial Mathematics
&
Informatics

НАУЧНИ ТРУДОВЕ

Том 61, серия 6.5.
Финансова математика
&
Информатика

Ruse
Русе
2022

Volume 61 of PROCEEDINGS includes the papers presented at the scientific conference RU&SU'22, organized and conducted by University of Ruse "Angel Kanchev" and the Union of Scientists - Ruse. Series 6.5 contains papers reported in the Financial Mathematics and Informatics sections.

Book	Code	Faculty and Section
Faculty of Natural Sciences and Education		
6.1.	FRI-1.405B-SSS-MIP	Mathematics, Informatics and Physics
6.2.	FRI-1.307-SSS-PP	Pedagogy and Psychology
6.3.	FRI-2G.408-SSS-LLA	Linguistics, Literature and Art Science
	FRI-2G.408-SSS-HEF	History, Ethnology and Folklore
6.4.	FRI-2G.305-1-ERI	Education - Research and Innovations
6.5	FRI-2.204-SSS-FM	Financial Mathematics
	FRI-1.405B-SSS-I	Informatics

The papers have been reviewed.

ISSN 1311-3321 (print)

ISSN 2535-1028 (CD-ROM)

ISSN 2603-4123 (on-line) Copyright © authors

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.

The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



PROGRAMME COMMITTEE

- **Prof. Amar Ramdane-Cherif**
University of Versailles, France
- **Assoc. Prof. Manolo Dulva Hina**
ECE Paris School of Engineering, France
- **Prof. Leon Rothkrantz**
Delft University of Technology, Netherlands
- **Assoc. Prof. Antonio Jose Mendes**
University of Coimbra, Portugal
- **Prof. Ville Leppanen**
University of Turkey, Finland
- **Assoc. Prof. Marco Porta**
University of Pavia, Italy
- **Prof. Douglas Harms**
DePauw University, USA
- **Prof. Zhanat Nurbekova**
L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur Sultan, Kazakhstan
- **Prof. Mirlan Chynybaev**
Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyzstan
- **Prof. Ismo Hakala, PhD**
University of Jyväskylä, Finland
- **Prof. Dr. Artur Jutman**
Tallinn University of Technology, Estonia
- **Prof. RNDr. Vladimir Tvarozek, PhD**
Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava, Slovakia
- **Doc. Ing. Zuzana Palkova, PhD**
Slovak University of Agriculture in Nitra, Nitra, Slovakia
- **Andrzej Tutaj, PhD**
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
- **Prof. Valentin Nedeff Dr. eng. Dr.h.c.**
“Vasile Alecsandri” University of Bacău, Romania
- **Dr. Cătălin POPA**
“Mircea cel Bătrân” Naval Academy, Constantza, Romania
- **Prof. dr Larisa Jovanović**
Alfa University, Belgrade, Serbia
- **Prof. dr hab. Edmund Lorencowicz**
University of Life Sciences in Lublin, Poland
- **Assoc. Prof. Ion Mierlus - Mazilu, PhD**
Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania
- **Prof. Dojčil Vojvodić PhD**
Faculty of Philosophy, University of Novi Sad, Serbi
- **Assoc. Prof. Alexandrache Carmen, PhD**
Departament of Teacher Training, “Dunarea de Jos”, Galati University, Romania
- **Prof. Alberto Cabada**
University of Santiago de Compostela, Faculty of Mathematics, Santiago de Compostela, Spain
- **Kamen Rikev, PhD**
Institute of Slavic Philology, Maria Curie-Skłodowska University in Lublin, Poland
- **Prof. Emilija Gjorgjeva, PhD**
Goce Delchev University - Shtip, Nord Macedonia
- **Prof. Dr. Ricardo Gobato**
Secretariat of State of Parana Education and Sport (SEED/PR),

Laboratory of Biophysics and Molecular Modeling Genesis

• **Prof. Dr. Fatima Rahim Abdul Hussein**

University of Misan, College of Basic Education, English Department, Iraq

Anna Klimentova, PhD

Constantine the Philosopher University Nitra, Slovakia

• **Prof. Petar Sotirow DSc**

Maria Curie-Sklodowska University of Lublin, Poland

• **Prof. Stepan Terzian DSc**

Bulgarian Academy of Science, Bulgaria

• **Prof. Igor Kevorkovich Danilov, DSc**

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

• **Prof. Aleksander Valentinov Sladkowski, DSc**

Silesian University of Technology, Poland

• **Prof. Dr. Vera Karadjova,**

“St. Kliment Ohridski” University – Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia

• **Prof. Dr. Aleksandar Trajkov**

“St. Kliment Ohridski” University - Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia

• **Prof. Dr. Petar Pepur**

University of Split, Croatia

• **Prof. Dr. Korhan Arun**

Namik Kemal University, Tekirdağ, Turkey

• **Prof. Yuliya Yorgova, PhD**

Burgas Free University, Bulgaria

• **Prof. Claudia Popescu, PhD**

Bucharest University of Economic Studies, Romania

• **Prof. Dr. Gerhard Fiolka**

University of Fribourg, Switzerland

• **Prof. Haluk Kabaalioglu, PhD**

Yeditepe University, Turkey

• **Prof. Silva Alves, PhD,**

University of Lisbon, Portugal

• **Hanneke van Brugge, DHC mult**

Appeldoorn, The Netherlands

• **Prof. Nino Žganec, DSc**

President of European Association of Schools of Social Work, University of Zagreb, Croatia

• **Prof. Violeta Jotova**

Direction Pediatrics at St. Marina University Hospital - Varna, Bulgaria, Chair ESPE
Postgraduate Qualification Committee

• **Prof. Tanya Timeva, MD, PhD**

Obstetrics and Gynecology Hospital "Dr. Shterev", Sofia, Bulgaria

• **Prof. Kiril Stoychev, PhD,**

Institute of Metal Science, Equipment and Technologies “Acad. A. Balevsci” with
Haydroaerodinamics centre – BAS, Bulgaria

• **Assoc. Prof. Mark Shamtsyan, PhD**

Technical University, Saint Petersburg, Russia

• **Assoc. Prof. Oleksii Gubenia, PhD**

National University of Food Technologie, Kiev, Ukraine

• **Assoc. Prof. Olexandr Zaichuk, DSc**

Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnepropetrovsk, Ukraine

• **Prof. Eugene Stefanski, DSc**

Samara University, Russia

- **Doc. Dr Tatiana Strokovskaya**
International University of Nature “Dubna”, Dubna, Russia
- **Prof. Papken Ehiasar Hovsepian**
Sheffield Hallam University, Sheffield, UK
- **Accos. Prof. Krassimir Dochev Dochev, PhD**
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Mariana Yordanova Docheva, PhD**
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Assoc. Prof. Ivan Antonov Lukanov, PhD**
University of Botswana, Faculty of Engineering and Technology, Gaborone, Botswana
- **Assoc. Prof. Petko Vladev Petkov, PhD**
Research Associate Cardiff University, UK
- **Prof. Dr. Gabriel Negreanu**
University Politehnica of Bucharest, Romania

ORGANISING COMMITTEE

♦ ORGANIZED BY: UNIVERSITY OF RUSE (UR) AND UNION OF SCIENTISTS (US) - RUSE

♦ ORGANISING COMMITTEE:

- **Chairperson:**

COR. MEM Prof. Hristo Beloev, DTSc – Rector of UR, Chairperson of US - Ruse

- **Scientific Secretary:**

Prof. Diana Antonova PhD, Vice-Rector Research,
dantonova@uni-ruse.bg, 082/888 249

- **Members:**

- **Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Sciences and Veterinary Medicine**
- **Maintenance and Reliability**
- **Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment**
- **Ecology and Conservation**
- **Industrial Design**
Assoc. Prof. Plamen Manev,
pmanev@uni-ruse.bg, 082 888 542
- **Contemporary Foreign Language Teaching; Didactics, Pedagogy and Psychology;**
(16.10., Silistra)
Assoc. Prof. Diana Zhelezova-Mindizova, PhD,
dmindizova@uni-ruse.bg
- **Linguistics; Theory of Literature and History; Philosophy** (16.10., Silistra)
Assoc. Prof. Romyana Lebedova, PhD,
rlebedova@uni-ruse.bg
- **E-Learning; Energy Effectiveness; Natural Sciences; Technical Sciences; Mathematics and Informatics** (16.10., Silistra)
Pr. Assist. Evgenia Goranova, PhD,
egoranova@uni-ruse.bg
- **Chemical Technologies** (06-07.11., Razgrad)
- **Biotechnologies and Food Technologies** (06-07.11., Razgrad)
Assoc. Prof. Tsvetan Dimitrov, PhD,
conf_rz@abv.bg, 0887 631 645
- **Mechanical Engineering and Machine-building Technologies**
Assoc. Prof. Dimitar Dimitrov, PhD,
ddimitrov@uni-ruse.bg, 0886 474 834, 082/888 653
- **Electrical Engineering, Electronics and Automation**
Assoc. Prof. Boris Evstatiev, PhD,
bevstatiev@uni-ruse.bg, 082 888 371
- **Communication and Computer Systems**
Assoc. Prof. Galina Ivanova, PhD, giivanova@uni-ruse.bg, 082 888 855
Pr. Assist. Ivanka Tsvetkova, PhD, itsvetkova@uni-ruse.bg, 082 888 836
- **Transport and Machine Science**
Assoc. Prof. Simeon Iliev, PhD,
spi@uni-ruse.bg, 082 888 331

- **Sustainable and intelligent transport systems, technologies and logistics**
Prof. Velizara Pencheva, PhD,
vpencheva@uni-ruse.bg, 082 888 558, 082 888 608
- **Economics and Management**
Pr. Assist. Miroslava Boneva, PhD, mboneva@uni-ruse.bg, 082/888 776
Pr. Assist. Elizar Stanev, PhD, estanev@uni-ruse.bg, 082/888 703
- **European studies, security and international relations**
Prof. Vladimir Chukov, DSc, vlachu1@gmail.com, +359 82 825 667
Assoc. Prof. Mimi Kornazheva, PhD, mkornazheva@uni-ruse.bg, +359 82 825 667
- **Mathematics, Informatics and Physics**
Prof. Tsvetomir Vasilev, PhD,
tvasilev@uni-ruse.bg, 082/888 475
- **Education – Research and Innovations**
Assoc. Prof. Emilia Velikova, PhD,
evelikova@uni-ruse.bg, 0885 635 874
- **Pedagogy and Psychology**
Assoc. Prof. Bagryana Ilieva, PhD,
bilieva@uni-ruse.bg 082 888 219
- **History, Ethnology and Folklore**
Pr. Assist. Reneta Zlateva, PhD
rzlateva@uni-ruse.bg, 082/888 752
- **Linguistics, Literature and Art Science**
Assoc. Prof. Velislava Doneva, PhD,
doneva_v@uni-ruse.bg, 0886 060 299
- **Health Promotion**
Assoc. Prof. Stefka Mindova, PhD,
smindova@uni-ruse.bg, 0882 895 149
- **Social Work**
Prof. Sasho Nunev DSc,
snunev@uni-ruse.bg, 0886 802 466
- **Medical and clinical diagnostic activities**
Assoc. Prof. Nikola Sabev, DSc,
nsabev@uni-ruse.bg, 0882 123 305
- **Health Care**
Pr. Assist. Greta Koleva, PhD,
gkoleva@uni-ruse.bg, 0882 517 173
- **Law**
Assoc. Prof. Elitsa Kumanova, PhD,
ekumanova@uni-ruse.bg, 0884 980 050
- **National Security**
Assoc. Prof. Milen Ivanov, DSc,
poligon@abv.bg, 082 888 736
- **Quality of Higher Education**
Prof. Ivanichka Serbezova, PhD, iserbezova@uni-ruse.bg
Daniela Todorova, dtodorova@uni-ruse.bg, 082 888 378.

• **REVIEWERS:**

FINANCIAL MATHEMATICS

- Prof. Angela Slavova, DSc
- Assoc. Prof. Iliya Brayarov, PhD
- Assoc. Prof. Yuriy Kandilarov, PhD
- Assoc. Prof. Evelina Veleva, PhD
- Assoc. Prof. Miglena Koleva, DSc,
- Pr. Assist. Prof. Tihomir Gyulov, PhD.

INFORMATICS

- Accos. Prof. Desislava Atanasova, PhD,
- Accos. Prof. Desislava Baeva, PhD,
- Accos. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD,
- Pr. Assist. Prof. Metodi Dimitrov, PhD,
- Pr. Assist. Prof. Magdalena Andreeva, PhD.

FINANCIAL MATHEMATICS

Content

1. FRI-2.204-SSS-FM-01	11
Pricing Options Via Stochastic Differential Equations Simulation	
<i>Teodora Klimenko, Velizar Pavlov</i>	
2. FRI-2.204-SSS-FM-02	18
Numerical Estimation of Implied Volatility of the Underlying Asset Price for European Options	
<i>Teodora Klimenko, Velizar Pavlov</i>	
3. FRI-2.204-SSS-FM-03	19
Comparative Analysis Between Fiat and Crypto Currencies. Organization of Optimal Risk Portfolio	
<i>Victoria Deninska, Vesela Mihova, Ivan Georgiev</i>	
4. FRI-2.204-SSS-FM-04	26
Forecasting and Estimating the Capital Activities of Dowjones Index	
<i>Iva Stefanova, Elitsa Raeva</i>	
5. FRI-2.204-SSS-FM-05	35
Stefan's Task for Nonlinear Equation of Diffusion in Population Biology	
<i>Gabriela Milanova, Julia Chaparova</i>	
6. FRI-2.204-SSS-FM-06	43
Characteristics and Methodology of the Tax System in Bulgaria	
<i>Mihaela Dimitrova, Iliyana Raeva</i>	
7. FRI-2.204-SSS-FM-07	50
Analysis of Variance (ANOVA)	
<i>Preslava Dimitrova, Velizar Pavlov</i>	
8. FRI-2.204-SSS-FM-08	57
Model for Pricing of Capital Assets	
<i>Mihaela Dimitrova, Iliyana Raeva</i>	

INFORMATICS

Content

1. FRI-1.405A-SSS-I-01	63
Training 12th Grade Students for National Graduation Exam by Using Information Technologies	
<i>Bozhidar Atanasov, Kamelia Shoilekova</i>	
2. FRI-1.405A-SSS-I-02	68
Game and Website Design and Development	
<i>Serkan Sadulov, Mustafa Mustafov, Kamelia Shoilekova</i>	
3. FRI-1.405A-SSS-I-03	73
Methodology & Techniques Used in The Development of Online Order System	
<i>Pavel Angelov, Tzvetomir Vassilev</i>	
4. FRI-1.405A-SSS-I-04	80
Web Based Multimedia System for Informational and Commercial Use in Wide Variety of Organisations	
<i>Martin Dzhurov, Boyana Ivanova</i>	
5. FRI-1.405A-SSS-I-05	81
Cloud-Based Integrated Development Environments	
<i>Vladislav Nikolov, Valentina Voinohovska</i>	
6. FRI-1.405A-SSS-I-06	85
The Node Connect Educational Game and Its Application in Mathematics Education	
<i>Petar Mishev, Galina Atanasova</i>	

PRICING OPTIONS VIA STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS SIMULATION¹

Teodora Klimenko

Financial Mathematics Student,

University of Ruse

E-mail: tediklimenko@abv.bg

Prof. Velizar Pavlov, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,

University of Ruse

E-mail: vpavlov@uni-ruse.bg

Abstract: Investors use the pricing of financial derivatives to increase the expected return and reduce the risk associated with an investment. Options offer limited risk, and for this reason many researchers develop models that accurately price options. In this paper we consider the best-known option pricing model, the Black-Scholes model, and then apply numerical modelling techniques to stochastic differential equations, the Euler-Maruyama and Milstein methods, using Monte Carlo simulations. Next, we prove that the numerical approximations will converge in a strong sense to the price of European call options, and we show that the empirically computed convergence rate approaches the theoretical convergence rate for both the Euler-Maruyama and Milstein methods.

Key words: Option pricing, Black – Scholes formula, Euler-Maruyama method, Milstein method, Monte Carlo simulations, strong convergence rate

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните няколко години деривативните ценни книжа (опции, фючърси и форуърдни договори) се превърнаха в основни инструменти както за корпорациите, така и за инвеститорите. Дериватите улесняват прехвърлянето на финансови рискове. Като такива те могат да се използват за хеджиране на рискови позиции или за поемане на рискове в очакване на печалби [1].

Опциите по същество са договори между две страни, които дават на притежателите си правото да купят или продадат базов актив на определена цена в рамките на определен период от време. Стойността на опцията е обвързана с базовия актив, който може да бъде акции, облигации, валута, лихвени проценти, пазарни индекси, борсово търгувани фондове или фючърсни договори. Опциите сами по себе си са ценни книжа, подобно на акциите или облигациите, и тъй като извличат стойността си от нещо друго, се наричат деривати [2].

Оценката на една опция е разделена обикновено на две части: Първата част е вътрешната стойност, която се определя като разликата между пазарната стойност на базовия актив и цената на упражняване на дадена опция. Втората част е времевата стойност, която чрез променлива, нелинейна връзка отразява очакваната стойност на датата на падежа, дисконтирана до днес [3].

Ценообразуването на опции и други финансови инструменти е един от най-важните проблеми в областта на финансите, тъй като целта му е да се определи справедливата цена на дадена ценна книга по отношение на по-ликвидни ценни книжа, чиято цена се определя от закона за търсенето и предлагането (най-често се оценяват „ванилия“ и „екзотични“ опции, конвертируеми облигации и др.) [4]. За да се определи цената на опцията, първо трябва да се избере модел на динамиката на цената на базовия актив, обикновено под формата на стохастично диференциално уравнение, зависещо от пазарни параметри като лихвен

¹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ОЦЕНЯВАНЕ НА ОПЦИИ ЧРЕЗ СИМУЛАЦИЯ НА СТОХАСТИЧНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ.

процент, волатилност на актива и т.н., след това да се намери решение на избрания модел в някаква форма и накрая да се получи необходимата цена на опцията. Волатилността на актива може да бъде постоянна (модел на Блек-Шолс), да зависи от стойността на базовия актив и времето (модел на локалната волатилност) или да удовлетворява някакво друго стохастично диференциално уравнение (модел на стохастичната волатилност) [5]. Точна аналитична формула за цената на опцията е получена по модела на Блек-Шолс и няколко други модела с локална и стохастична волатилност, но в общия случай трябва да се използват приближения или числени методи за оценка на опциите (когато е трудно или невъзможно да се използват други подходи) [6]. Изследваме проблема за ценообразуване на европейски опции, когато волатилността е функция на стойността на базовия актив и времето. За да решим проблема, използваме метода Монте Карло за конструиране на емпиричната плътност на разпределението на базовия актив и след това определяме стойността на опцията [7] [8]. Възможните приложения на моделите за локална волатилност с паралелни изчисления включват моделиране и управление на големи портфейли от акции, оценка и управление на пазарни и кредитни рискове.

Оценяването на опции чрез симулация Монте Карло е сред най-популярните начини за оценяване на определени видове финансови опции (напр. екзотични деривати, зависими от траекторията (като азиатски опции)), като директно симулира няколко хиляди възможни (но случайни) ценови пътища на основния процес със съответната стойност на упражняване на опцията за всеки път и след това изчислява средния резултат от процеса, дисконтиран до днес и това е стойността на опцията днес [9]. Методът може да гарантира, че с определена вероятност грешката на апроксимацията Монте Карло е по-малка от дадена стойност. Методите Монте Карло се приближават до решението по-бързо от методите за числено интегриране, изискват по-малко памет, имат по-малко зависимости от данни и са по-лесни за програмиране [10].

В настоящата работа са разгледани различни симулации на траекториите на Геометричното брауново движение, оценена е грешката на апроксимация при методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн и емпирично е определена степента на сходимост на двата метода.

СИМУЛАЦИИ ПО МЕТОДА НА ОЙЛЕР-МАРУЯМА И ПО МЕТОДА НА МИЛЩАЙН

За да се симулира цената на европейска кол опция, първо трябва да се определи процеса, който цената на базовия актив следва през целия период на действие на опцията ($T - t$). Известно е, че базовият актив следва геометричното брауново движение, зададено чрез стохастично диференциално уравнение (1), широко използвано при изследването и моделирането на динамични системи, които са обект на различни случайни смущения. Приема се, че цената на базовия актив S_t има очаквана възвръщаемост μ и постоянна волатилност σ .

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Методите на Ойлер-Маруяма (2) и на Милщайн (3) са често използвани техники за приблизително числово решение на стохастични диференциални уравнения, където μ представлява средната възвръщаемост, σ е волатилността, h е размерът на стъпката на дискретизация във времето, а ΔW_i е нарастването на Брауновото движение на всяка стъпка във времето, като за ΔW_i се генерират случайни числа със стандартно нормално разпределение (4).

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i h + \sigma S_i \Delta W_i \quad (2)$$

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i h + \sigma S_i \Delta W_i + \frac{\sigma^2 S_i}{2} (\Delta W_i^2 - h) \quad (3)$$

$$\Delta W_j = W_{t_{j+1}} - W_{t_j} = Z\sqrt{\Delta t}, \text{ където } Z \sim N(0,1) \quad (4)$$

Както се вижда от формулите по-горе (формули (2) и (3)), методът на Милщайн е почти същият като метода на Ойлер-Маруяма, но тук с цел да се получи по-висока точност на приближението, се добавя допълнителен член, като включваме един от двойните интеграли от разлагането на стохастичното диференциално уравнение по бази си на Ито-Тейлър:

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} &+ \int_{t_0}^t \{a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s [a'(X_z)a(X_z) + \frac{1}{2}a''(X_z)b^2(X_z)]dz + \int_{t_0}^s a'(X_z)b(X_z)dW_z\}ds \\ &+ \int_{t_0}^t \{b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s [b'(X_z)a(X_z) + \frac{1}{2}b''(X_z)b^2(X_z)]dz + \int_{t_0}^s b'(X_z)b(X_z)dW_z\}dW_s \\ \Rightarrow X_t - X_{t_0} &= a(X_{t_0})(t - t_0) + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R \end{aligned}$$

Ако се пренебрегне R , получаваме Метод на Ойлер-Маруяма (2).

Установено е, че доминиращият член в остатъка R е:

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \int_{t_0}^s dW_z dW_s \approx O(h)$$

Тогава:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s b'(X_z)b(X_z)dW_z dW_s &\approx b'(X_{t_0})b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s = \frac{b'b}{2}((\Delta W)^2 - h) \\ \Rightarrow X_t - X_{t_0} &= a(X_{t_0})(t - t_0) + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + \frac{b'b}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s + \tilde{R} \end{aligned}$$

Ако се пренебрегне $\tilde{R}$, се получава Метод на Милщайн (3).

Нека в качеството на входни данни за симулациите са дадени следните стойности на параметрите:

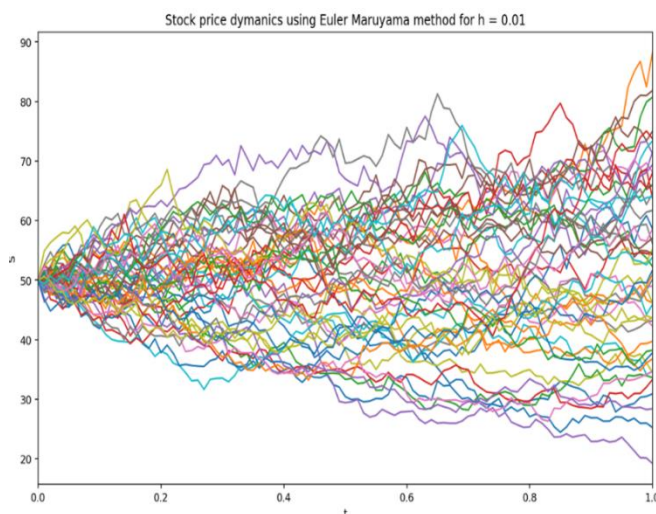
$$\mu = 0.06; \sigma = 0.3; S_0 = 50; h = 10^{-2}; t \in [0,1],$$

където S_0 е цената на базовия актив днес, а като изход се получава $S(t)$, което представлява динамиката на цената на базовия актив за дадената реализация на Брауновото движение в интервала $[0,T]$, като T е датата на падежа на опцията.

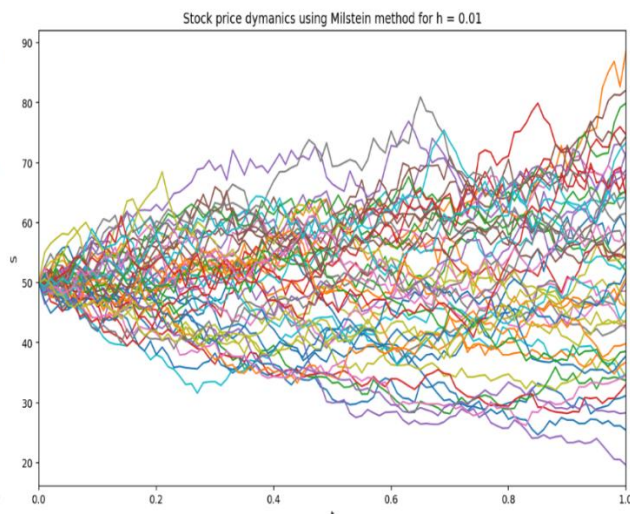
Изчертават се 50 траектории, като се използват методите на Ойлер-Маруяма (фигура 1) и на Милщайн (фигура 2). На графиките абсцисата t представлява времевите точки, а ординатата S е реализацията на цената на базовия актив, изчислена и по двата метода. Вижда се, че двете графики изглеждат много идентично, защото използваните формули са почти еднакви и за всяка симулация на пътя се използват едни и същи генерирани случайни числа (ΔW_i) и за двата метода.

Изчислява се точното аналитично решение $(S_{T,k})$ на геометричното брауново движение, като се вземе предвид големината на стъпките $h = 10^{-i}$ за $i = 1,2,3,4$, използвайки формула (5), като t е точно определен бъдещ момент от време, а W е самият Винеров процес, който представлява акумулираната сума от нарастванията dW до момента от време t .

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W} \quad (5)$$



Фигура 1. Динамика на цената на базовия актив по метода на Ойлер-Маруяма за $h=0.01$



Фигура 2. Динамика на цената на базовия актив по метода на Милщайн за $h=0.01$

За всеки размер на стъпката h се сравнява това точно решение $(S_{T,k})$ с апроксимациите $(\hat{S}_{T,k})$ от методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн, като грешката $\hat{\epsilon}(h)$ се изчислява със следната формула:

$$\hat{\epsilon}(h) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |S_{T,k} - \hat{S}_{T,k}|$$

Тук е необходима цената на базовия актив само на датата на падежа T , ето защо се взема само последната изчислена стойност от точното решение и апроксимацията, за да се оцени грешката. И така, за да получим средната грешка, първо се взема сумата от абсолютните грешки за всяка траектория и след това разделяме тази сума на M – броя на пътищата, които сме симулирали.

Таблица 1. Грешка при апроксимация по методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн

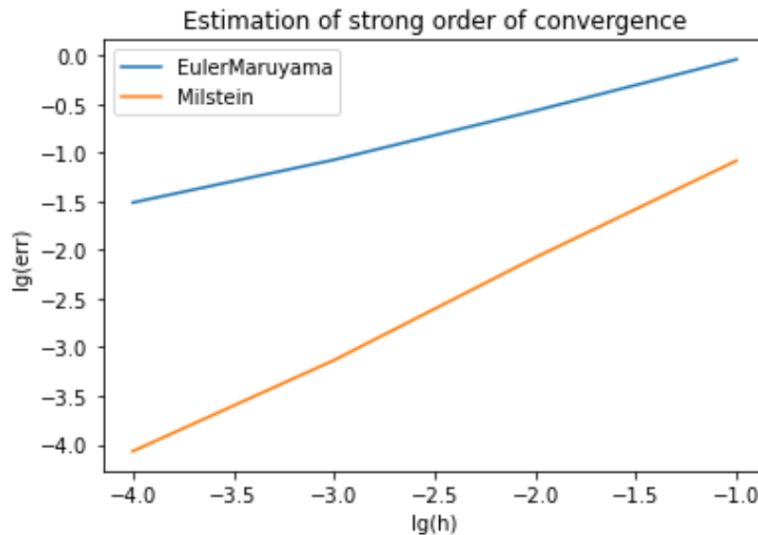
h	Err_EM	Err_M
0.1000	0.910831	0.082886
0.0100	0.270348	0.008376
0.0010	0.084558	0.000737
0.0001	0.030731	0.000085

В таблица 1 са дадени грешките при апроксимация на цената на базовия актив на датата на падежа T по методите на Ойлер-Маруяма (Err_EM) и на Милщайн (Err_M), при което h е размерът на стъпката във времето.

Както се вижда от таблицата, когато размерът на стъпката h намалява, грешките и по двата метода също намаляват. При най-голямата стъпка $h = 10^{-1}$ грешките също са най-големи, а след това намаляват. Забелязва се, че методът на Милщайн е по-точен и грешките

са по-малки от тези на метода на Ойлер-Маруяма, само защото има по-висок ред на сходимост.

Качеството на всеки алгоритъм, който приблизително определя истинската стойност на решението, зависи в голяма степен от степента на сходимост. Необходимо е да се оцени колко бързо приблизителното решение се приближава към истинското решение. За да се оцени степента на силна сходимост при всеки метод, се взема десетичен логаритъм от големината на стъпките $h = 10^{-i}$ за $i = 1, 2, 3, 4$ и от грешките, изчислени за двата метода.



Strong convergence order of Euler Maruyama is $c = 0.4920$
 Strong convergence order of Milstein is $c = 1.0015$

Фигура 4. Сходимост при методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн

Както се вижда от фигура 4, грешката, изчислена за метода на Милщайн, е не само по-малка от грешката за метода Ойлер-Маруяма, но и намалява много по-бързо. Тук при $h = 10^{-1}$ се вижда, че разликата между двата метода е по-малка, отколкото при $h = 10^{-4}$, тъй като редът на сходимост на метода на Милщайн е по-висок от този на Ойлер-Маруяма. Прилагайки линейна регресия, откриваме степента на силна сходимост и за двата метода. Вижда се, че резултатите се доближават до теоретичните стойности на редовете на сходимост: $\frac{1}{2}$ за метода Ойлер-Маруяма и 1 за метода на Милщайн.

С цел да се намери справедливата стойност на европейската кол опция, в допълнение към посочените по-горе стойности на параметрите на геометричното брауново движение, се задават цена на упражняване на опцията $K=50$ и лихвен процент $r = 0.05$. Прилага се формулата на Блек-Шолс:

$$V^{EC} = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

където

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

За да се апроксимира цената на европейската кол опция, се прилагат методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн, при което първо трябва да се замени μ с r , т.е. цената на базовия актив S има очаквана възвръщаемост μ , равна на безрисковата норма r . Така се използва неутрално по отношение на риска стохастично диференциално уравнение.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

За оценка на днешната цена на опцията V_0 , се взема очакваната стойност на платежната функция под рисково-неутрална мярка Q , дисконтирана до днешния момент от време.

$$V_0 = e^{-rT} * E^Q[S_T - K]^+$$

За да се апроксимира очакваната стойност на платежната функция при неутрална по отношение на риска мярка, се използва метода Монте Карло, при който се симулират M пътя и с помощта на индекса i , се фиксира определена траектория от 1 до M . Пресмята се платежната функция $[S_T^i - K]^+$ за всяка една симулация, като се взема последната оценена цена на базовия актив за всяка траектория, т.е. на датата на падежа T . След това, сумата от платежните функции за всички пътища се дели на броя симулации M и се получава средната стойност на платежната функция, която се умножава по e^{-rT} , за да се дисконтира до днешния момент от време.

Така се намира справедливата стойност на европейската опция днес:

$$\widetilde{V}_0^{EC} = e^{-rT} * \frac{1}{M} * \sum_{i=1}^M [S_T^i - K]^+$$

Накрая се сравняват резултатите, получени чрез методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн с решението на Блек-Шолс за различен брой симулирани пътища $M=[10,100,1000]$ и фиксиран размер на стъпката във времето $h = 10^{-4}$. За тази цел се изчислява и за двата метода абсолютната грешка на приблизителната цена на опцията и точното решение на Блек-Шолс:

$$|\widetilde{V}_0^{EC} - V^{EC}|$$

В таблица 2 е дадена оценка на справедливата цена на европейска кол опция по метода на Блек-Шоус, апроксимация на цената на опцията чрез методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн и оценка на грешката на апроксимация.

Таблица 2. Оценка на справедливата цена на европейска кол опция

M	C_BS	C_EM	Err_EM	C_M	Err_M
10	7.115627	11.447294	4.331666	11.455958	4.340331
100	7.115627	5.315444	1.800184	5.315311	1.800316
1000	7.115627	7.291544	0.175916	7.291204	0.175577

Във първата колона е даден броят на симулираните пътища M . Лесно се забелязва, че точната цена на опцията (C_{BS}) не зависи от броя симулации M , затова тя е еднаква за всяко $M = [10,100,1000]$.

C_{EM} представлява приближената цена на европейската кол опция, изчислена с помощта на метода на Ойлер-Маруяма, а Err_{EM} е грешката на тази апроксимация. C_M представлява приближената цена на европейската кол опция, изчислена с помощта на метода на Милщайн, а Err_M е грешката на тази апроксимация.

От таблица 2 се вижда, че когато се симулират само 10 пътя, апроксимираната цена е далеч от теоретичната, но когато M се увеличава, резултатите от апроксимацията се

доближават все повече до точната цена на европейската кол опция. Грешката намалява, когато M се увеличава. При метода на Ойлер-Маруяма от 4,33 тя спада до 0,17. Също така, установяваме, че при малък брой симулирани пътища (M), няма значителна разлика между получените резултати от методите Ойлер-Маруяма и на Милщайн. Затова, за да се получат по-добри резултати когато се използва метода на Монте Карло, трябва да се симулират по възможност повече траектории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Разгледана е симулация на 50 траектории на Геометричното брауново движение, като са въведени и разяснени всички основни компоненти.
2. Емпирично е установена степен на силна сходимост за методите на Ойлер-Маруяма и на Милщайн.
3. Оценена е грешката на апроксимация на стойността на базовия актив и при двата метода
4. Намерена е справедливата цена на европейска кол опция чрез формулата на Блек-Шолс
5. Апроксимирана е справедливата цена на европейска кол опция, използвайки метода на Монте Карло, като за приближение на цената на базовия актив на датата на падежа се използват и двата метода на Ойлер-Маруяма и на Милщайн.
6. Оценена е грешката на апроксимация на справедливата цена на европейска кол опция и е представена съответна интерпретация.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. U. Seydel. Tools for Computational Finance. Springer-Verlag London Limited, 2012.
- [2] B. Øksendal. Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2003.
- [3] I. Karatzas and S. E. Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer Science + Business Media, Inc., 1991. An Introduction to Mathematical Finance with Applications. Understanding and Building Financial Intuition
- [4] A. Hirsa. Computational Methods in Finance. CRC Press, 2013.
- [5] M. Günther and A. Jüngel. Finanzderivative mit MATLAB. Vieweg+Teubner, 2010. Second Edition.
- [6] H. Föllmer and A. Schied. Stochastic Finance: an introduction in discrete time. De Gruyter Studies in Mathematics, 2011.
- [7] L. Andersen and V. Piterbarg. Interest rate modeling. Volume 1: foundations and vanilla models. Atlantic Financial Press, 2010.
- [8] L. Teng. Notes on Computational Finance. Lecture note, 2021.
- [9] L. D. Minkova. Stochastic Analysis and Applications, 2015
- [10] Steven E. Shreve. Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models. Springer

NUMERICAL ESTIMATION OF IMPLIED VOLATILITY OF THE UNDERLYING ASSET PRICE FOR EUROPEAN OPTIONS ²

Teodora Klimenko

Financial Mathematics Student,

University of Ruse

E-mail: tediklimenko@abv.bg

Prof. Velizar Pavlov, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,

University of Ruse

E-mail: vpavlov@uni-ruse.bg

Abstract: *Implied volatility is considered as one of the most important variables for determining profitability in options trading. Implied volatility indicates the future volatility of the underlying asset and can be used to predict the extent to which the price of the asset might fluctuate and thus whether options could become profitable before expiry. In this paper an iterative numerical method for calculating the implied volatility of European options is considered. This value is of particular importance since it is the main component of the option price. The Black-Scholes model is based on the assumption that the volatility of the underlying asset is constant and known, but after numerous experiments it has been shown that the reality is considerably more complicated. The implied volatility of the underlying asset prices shows a persistent smile pattern with a clear relationship between the option strike price and its implied volatility. At the same time, the volatility term structure shows the relationship between the implied volatility and the time to option expiration.*

Keywords: *Implied volatility, Black-Scholes formula, European options, iterative numerical root-finding method (Newton method)*

REFERENCES

- [1] R. U. Seydel (2012), *Tools for Computational Finance*. Springer-Verlag London Limited.
- [2] A. Hirsa (2013), *Computational Methods in Finance*. CRC Press.
- [3] Amin, Kaushik I., Andrew J. Morton. (1994), *Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models*. Journal of Financial Economics, vol: 35.
- [4] M. Günther and A. Jüngel (2010), *Finanzderivative mit MATLAB*. Vieweg+Teubner. Second Edition.
- [5] L. Teng (2021), *Lecture notes on Computational Finance 1*.
- [6] Barone-Adesi, Giovanni, Keith C. Brown, and W.V. Harlow (1994), *On the Use of Implied Stock Volatilities in the Prediction of Successful Corporate Takeovers*. *Advances in Futures and Options Research*.
- [7] Canina, Linda, and Stephen Figlewski (1993), *The Informational Content of Implied Volatility*. *The Review of Financial Studies*.

² This Report is presented on a Student Scientific Session on 27 May 2022 in “Financial Mathematics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper” Cristal Prize’22, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).“

COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN FIAT AND CRYPTO CURRENCIES. ORGANIZATION OF OPTIMAL RISK PORTFOLIO³

Victoria Deninska

Financial Mathematics Student

University of Ruse

E-mail: viktorija.deninska@gmail.com

Principal Assistant Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse

E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Ivan Georgiev, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse

E-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

Abstract: In the present paper we consider different types of financial instruments and especially fiat and cryptocurrencies, whose advantages and disadvantages are presented and a comparative analysis is made between them. A mixed portfolio has been organized, combining crypto and fiat currencies, indices and fuels. Based on weekly data for the period July 2020 – December 2021 incl. estimates of the rates of return, the standard deviations of the rates of return and the correlation matrix between the rates of return of the considered financial instruments are derived. Using these estimates as input data and based on the Markovic model, an optimal risk portfolio was built.

Keywords: Fiat Currency, Crypto Currency, Investment Strategies, Risk Portfolio Optimization

ВЪВЕДЕНИЕ

Всички хора инвестираме в нещо с ресурсите, които имаме в момента. Инвестирането е дългосрочно влягане на средства или капитал за придобиване на финансови инструменти или други активи с цел да се постигнат печелившо възвръщане във формата на друг доход или повишаване на стойността на инструмента. Свързано е със спестяването и се различава от потреблението. Включва се в много области на икономиката, като бизнес управлението и финансите, независимо дали за домакинства, фирми или правителства. Инвестицията представлява избор на физическо лице или юридическа организация след анализ или обмисляне къде да се сложат или дадат парите дали в движимо или недвижимо имущество или във финансов инструмент.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Днес всеки човек може да направи своя избор за инвестиция. Някои хора се впускат в по-рискови инвестиции, докато други залагат на по-сигурното. Нека разгледаме няколко различни видове финансови активи, събрани в един портфейл. Тези активи притежават както предимства, така и недостатъци, с които следва да бъдем запознати.

Първият вид актив, който избираме за нашия портфейл, са придобиващите все по-голяма популярност криптовалюти. Криптовалутата е форма на плащане, която може да циркулира без нужда от централен паричен орган като правителство или банка. Вместо това

³ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика” с оригинално заглавие на български език: СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ МЕЖДУ ФИАТНИ И КРИПТО ВАЛУТИ. ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОПТИМАЛЕН РИСКОВ ПОРТФЕЙЛ.

криптовалутите се създават с помощта на криптографски техники, които позволяват на хората да ги купуват, продават или търгуват сигурно [1].

Биткойн е първата криптовалута, очертана за първи път по принцип от Сатоши Накамото в [2]. Накамото описва проекта като „система за електронно плащане, базирана на криптографско доказателство вместо на доверие“. Това криптографско доказателство идва под формата на транзакции, които се проверяват и записват в блокчейн. Блокчейн е отворен, разпределен регистър, който записва транзакции в код. На практика това е малко като чекова книжка, която се разпространява в безброй компютри по света. Транзакциите се записват в „блокове“, които след това са свързани заедно във „верига“ от предишни транзакции с криптовалута.

Таблица 1. Предимства и недостатъци на криптовалутите.

	Предимства	Недостатъци
1	Съществува извън контрола на правителствата и централните власти.	Експертите смятат, че блокчейн и свързаните с него технологии ще нарушат много индустрии, включително финанси и право.
2	По-евтини и по-бързи парични преводи и децентрализирани системи, които не се сричат в една точка на повреда.	Волатилност на цените, висока консумация на енергия за добивни дейности и използване в престъпни дейности.
3	Няма шанс за изтичане на лична информация – за разлика от стандартните плащания, тук не е необходимо да споделяте личния си ключ с никого. Никой не може да провери информацията ви за плащане и тя не може да изтече.	Нерегулирани и неподкрепени криптовалути са конструкция на частния сектор без официален надзор или регулиране. Това означава, че криптовалутите са широко отворени за експлоатиране от престъпници като средство за измама на непредпазливи инвеститори.
4	Потенциал за висока възвръщаемост - през последните пет години индексът S&P 500 на американските акции с голяма капитализация се усложни с годишен темп на растеж от 14,5%, а за същия период от време цената на биткойн в щатски долари се увеличи с годишен темп на растеж от 131,5%.	Лошо съхраняване на стойност - когато се преобразува обратно в основната валута на индивида, стойността на криптовалутите ще се колебае силно дори на база в рамките на деня. Ограничено приемане - докато биткойн и някои други криптовалути сега се приемат в нарастващ брой платежни платформи, броят на местата, където човек може да обменя криптовалути за реални стоки или услуги, остава много ограничен.

Фиатните пари, това са издадени от правителствата валути, които не са обезпечени със стока като злато или сребро, а по-скоро подкрепени от правителството, което ги е емитирало. [3]. Те дават на централните банки по-голям контрол върху икономиката, защото могат да контролират колко пари се отпечатват. Стойността на фиатните пари се извлича от връзката между търсенето и предлагането, а не от стойността на стоката, която ги подкрепя. Повечето съвременни хартиени валути като щатския долар, еврото и други основни световни валути са фиатни.

Терминът „fiat“ е латинска дума, която често се превежда като „ще бъде“ или „нека бъде направено“. По този начин фиатните валути имат стойност само защото правителството поддържа тази стойност; няма полза от фиатните пари сами по себе си. Тъй като фиатните

пари не са свързани с физически резерви, като например национални запаси от злато или сребро, те рискуват да загубят стойност поради инфлация или дори да станат безполезни в случай на хиперинфлация.

Таблица 2. Предимства и недостатъци на фиантите валути

	Предимства	Недостатъци
1	Контрол от страна на правителството - основно предимство на фиатните пари е, че предоставят на правителството контрол върху икономиката чрез своята централна банка. Този тип валута е подкрепяно от правителството законно платежно средство. Следователно централната банка контролира нейното производство и обръщение, като по този начин контролира паричното предлагане и банковата система.	Основен недостатък на фиатните пари е, че рискуват да загубят стойността си поради инфлация или да станат напълно безполезни по време на хиперинфлация поради най-простата причина, че не са подкрепени от физически резерви, особено стоки като злато и сребро [4].
2	Контрол на паричното предлагане – използва се за справяне с инфлацията и да повлияе върху съвкупното търсене и икономическата активност.	Фиатните пари извличат своята стойност от този конкретен принцип: парите могат да бъдат създадени без злато или по-конкретно, от нищото за сметка на инфлацията. Увеличаването на обръщението на тези пари естествено води до инфлация.
3	По време на икономическа рецесия: правителството може да стимулира икономиката, като създава работни места. Заетостта обаче изисква заплащане. Заобиколното решение е да се увеличи паричното предлагане чрез отпечатване на повече валута за сметка на високите нива на инфлация.	Правителствената интервенция в областта на паричните продукти е довела до колективна корупция. Когато едно правителство увеличава паричното предлагане и до известна степен контролира лихвения процент, за да раздвижи икономическите дейности, то насърчава общественото придържане към икономически и социално разрушителни политики.
4	По-практични от стоковите пари. Повечето монетаристи твърдят, че свързването на парите с благородните метали е непрактично, тъй като растежът на населението и увеличаването на икономическата активност биха изисквали разширяване на паричното предлагане, което от своя страна би изпреварило капацитета на обществата да добиват благородни метали.	Отпечатването на пари от нищото също е свободна политика, която може изкуствено да понижи лихвените проценти и да предостави стимули за поемане на прекомерни рискове, както и да доведе до ескалация на кризата на платежоспособността.

Индексът Dow Jones [5], известен като DJIA и DJI30 е борсов индекс, който проследява представянето на 30 от най-големите публично търгувани компании на Нюйоркската фондова борса и Nasdaq. Индексът е ценово претеглен, което означава, че акциите с по-висока цена имат по-голямо тегло в показателя. Той е един от най-старите индикатори за здравословното състояние на американската икономика. Ако икономиката на САЩ расте и DJIA расте, ако икономиката е в криза, то и DJIA се понижава.

Промените в цената на Dow Jones могат да бъдат предизвикани от множество фактори, повечето от които са с временен характер. Такива са монетарната политика на Федералния Резерв, икономическите данни за щатската икономика, политическа и икономическа стабилност, цената на щатския долар, отчетите на компаниите, включени в индекса.

S&P 500 или Standard & Poor's 500 [6] е индекс, претеглен спрямо пазарната капитализация на 500 водещи компании в САЩ. Поради своята дълбочина и разнообразие, S&P 500 се смята за един от най-добрите измерватели на големите американски акции и дори на целия пазар на акции. S&P 500 също може да бъде използван като индикатор за справяне на икономиката на САЩ. Някои инвеститори възприемат S&P 500 като представителен за пазарите на акции в САЩ, тъй като включва повече акции във всички сектори.

Съкровищните бонове [7] са форма на държавни ценни книжа с краткосрочен падеж (обикновено до една година), които носят фиксирана доходност. Често съкровищни бонове се емитират при нужда от капиталов ресурс за финансиране на инфраструктурни проекти, макар че в миналото с този вид инструмент са се осигурявали средства за справяне с тежки кризисни ситуации, например войните. Технически, ценните книжа на Министерството на финансите на САЩ са сертификати за задължнялост, произтичащи от федералното правителство на САЩ. Това всъщност означава, че всеки път, когато купувате ценна книга на съкровищницата, вие всъщност отпускате пари на правителството за предварително определен период от време.

Ако посочим основната разлика между бонове, банкноти и облигации, трябва да кажем, че това е срока до падежа: краткосрочни, средносрочни и дългосрочни. Краткосрочните се наричат съкровищни бонове и се емитират със срок до падежа (матуритет) до една година. Средносрочните – съкровищни талони или билети са държавни ценни книжа със срок на изплащане от една до пет години включително. Дългосрочните, наричани съкровищни облигации, са ДЦК със срок на изплащане над пет години.

Характерно за съкровищните бонове е, че при придобиването им купувачите обикновено получават отстъпка от номиналната стойност, а на датата на техния падеж на тях се изплаща пълната номинална стойност, което носи и самата печалба за инвеститорите. Разликата между покупната цена и номиналната стойност е равна на спечелената лихва.

Съкровищните бонове имат предимство пред другите пазарни инструменти поради нулевия риск, свързан с тях. Вторичният пазар на държавни облигации е много активен и те имат по-висока степен на търгуемост.

Естествено и при инвестирането в ДЦК са валидни общите инвестиционни принципи, краткосрочните ценни книжа са свързани с по-малък риск от дългосрочните, ценните книжа с фиксиран доход са по-рискови от тези с плаващ.

Рискът от неплатежоспособност на практика не съществува, тъй като изплащането на главниците и лихвите е гарантирано от възможността на държавата да налага и събира данъци, а също така и да емитира нови ценни книжа.

ДЦК са директно задължение на правителството и инструмент за финансиране на бюджетния дефицит [8]. По своя характер те са високоликвидни, като изплащането им на падежа е гарантирано с пълната законодателна сила на държавата. Това тяхно качество им придава статут на доминиращ инструмент на финансовите пазари. ДЦК заемат висок относителен дял в борсовата търговия. В някои развити страни сделките с тях достигат до 80% от оборота на пазарите.

Друг инструмент, използван в настоящата работа, е суровият петрол. Той представлява нерафиниран нефт и спада към изкопаемите горива. Съставен е от въглеводороди и други органични материали и може да бъде рафиниран, за да се използва за производство на продукти като бензин, дизел, нефтохимикали (като пластмаса), торове и дори лекарства [9]. Петролът е двигателят на световната икономика и може и най-важната суровина на планетата. Реално цените на петрола могат да имат ефект върху всичко около нас и цялостната ни покупателна способност. Цената на петрола е високо волатилна и може предложи възможности за солидни печалби (и солидни загуби разбира се). Тя се влияе от

геополитическата несигурност и от глобалните икономически данни: илни данни за икономиката могат да подкрепят петрола, а слабите данни да се отразят негативно.

Числов пример

Финансовите инструменти, които ще фигурират в нашия инвестиционен портфейл, са: суров петрол, от криптовалутите – CMC Crypto 200 индекс от Solactive и Bitcoin, от фиатните валути – турска, британска лира и евро към долар, също така и индексите S&P 500 и Dow Jones.

Таблица 3. Очаквана норма на възвръщаемост (R_s) и стандартно отклонение (σ) за акциите на двете компании по седмични данни за периода юли 2020 – декември 2021 вкл.

Актив	R_s	σ
Crude Oil	4,91%	6,10%
CMC Crypto	-10,90%	18,32%
Bitcoin USD	2,87%	10,27%
TRY/USD	2,08%	6,93%
EUR/USD	0,46%	0,95%
GBP/USD	0,64%	1,17%
S&P 500	-1,87%	3,11%
Dow Jones	-0,29%	2,11%

На база данните от разглеждания период е построена и корелационна матрица (Таблица 4).

Таблица 4. Корелационна матрица

	Crude Oil	CMC Crypto	Bitcoin USD	TRY/USD	EUR/USD	GBP/USD	S&P 500	Dow Jones
Crude Oil	1,0000	-0,2321	-0,0900	0,0294	-0,0756	0,1875	-0,1779	0,0738
CMC Crypto	-0,2321	1,0000	0,0514	-0,1027	0,0232	-0,0883	0,1203	0,0339
Bitcoin USD	-0,0900	0,0514	1,0000	-0,0456	-0,0405	-0,0994	-0,0658	-0,0209
TRY/USD	0,0294	-0,1027	-0,0456	1,0000	-0,0481	-0,0675	-0,0496	-0,0047
EUR/USD	-0,0756	0,0232	-0,0405	-0,0481	1,0000	0,2429	-0,0957	-0,0615
GBP/USD	0,1875	-0,0883	-0,0994	-0,0675	0,2429	1,0000	-0,1377	-0,1266
S&P 500	-0,1779	0,1203	-0,0658	-0,0496	-0,0957	-0,1377	1,0000	0,7787
Dow Jones	0,0738	0,0339	-0,0209	-0,0047	-0,0615	-0,1266	0,7787	1,0000

Оптимален рисков портфейл

Моделът за оптимизиране на инвестиционни портфейли, с който разполага теорията на Марковиц показва, че един портфейл с n актива не трябва да се разглежда като едно цяло, когато се отнася до очакваната му възвращаемост. Тъкмо напротив, портфейлът трябва да се разглежда като съвкупност от активите и тяхната корелация и да се намери очакваната им възвращаемост. Така се определя както очакваната възвращаемост, така и рискът, който носи всеки портфейл.

Нека вземем портфейл с n рискови активи и един безрисков актив. В [10] е разгледана задачата за оптимизация на този портфейл, чиято цел е да се максимизира наклонът на линията на разпределение на капитала (CAL) за всеки избран рисков портфейл P :

$$\min F = -\max S_P = -\frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_P}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

където:

- w_i - теглото на i -тия актив,

- $E(r_p)$ – очакваният процент на възвръщаемост на рисковия портфейл; това представлява средната стойност на очакваната норма на възвръщаемост на рисковите активи, претеглена със съответната пропорция, която всеки от тях заема в рисковия портфейл:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$$

- σ_P – стандартното отклонение на рисковия портфейл:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho(r_i, r_j)}$$

- $\rho(r_i, r_j)$ – коефициента на корелация между i -тата и j -тата норма на възвръщаемост на активите.

В настоящия труд е решена задачата за съставяне на оптимален рисков портфейл от разгледаните осем финансови актива, който да бъде смесен със съкровищни бонове. За решението на задачата е използван готов програмен код на Matlab [11], който се основава на модификация на модела на Марковиц при следните допускания: съществуват безрискови активи; вземане на заеми при безрискова ставка; възможност за къси продажби на рискови активи. Като безрисков актив са използвани съкровищни бонове с годишна доходност от 1,512%, което се равнява на 0,0291% (или 0,000291) седмична доходност (1,512/52).

Използвайки като входни данни стойностите от таблици 3 и 4 и информацията за доходността на съкровищните боове, са получени следните резултати. Оптималният рисков портфейл се състои от:

- В дълга позиция: 11,76% в Crude Oil, 2,99% в Bitcoin USD, 4,29% в TRY/ USD, 35,93% в EUR/ USD и 24,53% в GBP/ USD;
- В къса позиция: 2,79% в CMC Crypto и 17,71% в S&P 500.

Dow Jones отпада от портфейла, тъй като не е изгодно да инвестираме в него нито в къса, нито в дълга позиция.

Очакваната норма на възвръщаемост на рисковия портфейл е 1,71%, а оценката на стандартното отклонение е 1,04%. Наклонът на линията на разпределение на капитала е $S = 1,6237$.

В теорията и управлението на портфейли принципа на разделянето (separation principle) гласи, че всички инвеститори с еднакви входни списъци от данни (оценки на нормите на възвръщаемост, стандартните отклонения, корелационните матрици и доходността на безрисковия актив) ще държат един и същи рисков портфейл, като разликите в пълния им портфейл ще са в теглата, които те задават на оптималния рисков портфейл и на безрисковия актив [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Направен е описателен анализ на различни финансови инструменти. По-подробно са разгледани фиатни и крипто валути, като техните предимства и недостатъци са сравнени.

2. Разгледан е числов пример по реални данни от 01.07.2020 г. до 31.12.2021 г., включващ различни финансови инструменти. На базата на тези данни:

- i. Извършен е технически анализ по реални данни на ценни книжа с помощта на Excel.
- ii. По исторически данни се оценяват очакваните норми на възвръщаемост на разгледаните финансови инструменти, а също така стандартните отклонения и корелационната матрица между нормите на възвръщаемост на инструментите.

- iii. С помощта на готов код в Matlab, базиран на модела на Марковиц, са получени процентните дялове на разгледаните финансови инструменти в оптималния рисков портфейл. Изчислени са очакваната норма на възвръщаемост и стандартното отклонение на този портфейл.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] www.nerdwallet.com, *What Is Cryptocurrency? Here's What Investors Should Know*, Kevin Voigt and Andy Rosen.
- [2] Nakamoto, S., *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*, 2008, <<https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>>.
- [3] www.investopedia.com, *Fiat Money*, James Chen.
- [4] www.profolus.com, *Fiat Money: Advantages and Disadvantages*, Mathew Emmanuel Pineda.
- [5] admiralmarkets.com, *Dow Jones: Какво представлява и как да инвестирате в индекса*, Борис Петров.
- [6] www.investopedia.com, *The S&P 500 Index: Standard & Poor's 500 Index*, Will Kenton.
- [7] credirect.bg, *Финансов речник: Съкровищен бон*.
- [8] fakti.bg, *Как да инвестирате в Държавни ценни книжа*, Бранимира Милушева.
- [9] admiralmarkets.com, *Петрол: Как да се възползвате от промените в цената му*, Борис Петров.
- [10] Z. Bodie, A. Kane, and A. Marcus, *Investments*, 10th global ed., McGraw-Hill Education, Berkshire, 2014.
- [11] Centeno, V., I. Georgiev, V. Mihova, V. Pavlov, *Price Forecasting and Risk Portfolio Optimization, Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, AIP Publishing, 2164, 060006-1–060006-15, 2019.

FORECASTING AND ESTIMATING THE CAPITAL ACTIVITIES OF DOWJONES INDEX⁴

Iva Stefanova

Financial Mathematics Student
University of Ruse
E-mail: istefanova534@gmail.com

Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: *There is a variety of economic processes which have an impact on the stock prices. In the recent years, due to different factors, an economic crisis is coming which does not insure us for the future. That is why the investors need a pure evaluation of where to invest and what strategy to use for their portfolio. In the current paper the CAPM for stock pricing and ARIMA models are to predict and estimate future values of the stocks. The software SPSS is to analyse the data of the prices of the Dow Jones Industrial Average index and then predict its future prices. The aim is to estimate CAPM for some of the leading stocks of DowJones using Microsoft Excel and to compare the estimation from the historical data and the estimation of the forecast.*

Keywords: *Stock prices, Data analysis, ARIMA model, Forecasting, Capital Asset Price Model*

ВЪВЕДЕНИЕ

Акциите и техните цени се изменят във всяка една секунда. Времената днес са много трудно предвидими. Поради множество различни обстоятелства ставаме свидетели на световни бедствия, пандемии и войни, които влияят на световната икономика и предизвикват икономически кризи в по-малък или в по-голям мащаб. Инфлацията също е резултат от тези събития и справянето с нея може да е много предизвикателно. За да бъде постигнат успех в справянето с тези икономически процеси са нужни много знания, предвидливост и взимане на правилни решения. Нужно е да се анализира добре и да се правят прогнози на различните финансови активи, за да се знае къде е най-добре да вложи един инвеститор и кои са надеждните финансови инструменти. Част от тези финансови инструменти са акциите. В настоящата работа е разгледан един от индексите - Dow Jones Industrial Average.

DJIA на 30 големи водещи корпорации се изчислява още от 1896 г. Буквално преведено Dow Jones Industrial Average означава индустриално средно на Dow Jones. Това е най-известната мярка за отчитане на състоянието на фондовия пазар. В началото DJIA се е изчислявал като простата средноаритметична стойност на акциите, включени в индекса. Ако са били 30, е трябвало да се съберат техните стойности и да се разделят на 30. Процентното отклонение в DJIA в този случай е процентно отклонение в средната цена на 30-те акции. Dow Jones Industrial Average вече не е равен на средната цена на 30-те акции, защото процедурата на осредняване се коригира всеки път, когато една акция се раздели, когато изплати дивидент в акции по-голям от 10% или когато една от 30-те фирми бъде заменена с друга. Когато се случи някое от тези събития, делителят, използван за изчисляване на средната цена се променя така, че индексът да не се повлияе от събитието [1].

В настоящата работа е разгледан индексът DowJones в периода 25.02.2019 – 05.05.2022 [6]. С помощта на софтуера SPSS и Microsoft Excel първо ще прогнозираме бъдещите му 18 стойности (от 06.05.2022 до 01.06.2022 включително) чрез ARIMA (Autoregressive Integrated

⁴ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика” с оригинално заглавие на български език: ПРОГНОЗИРАНЕ И ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ ОТ ИНДЕКСА DOW JONES.

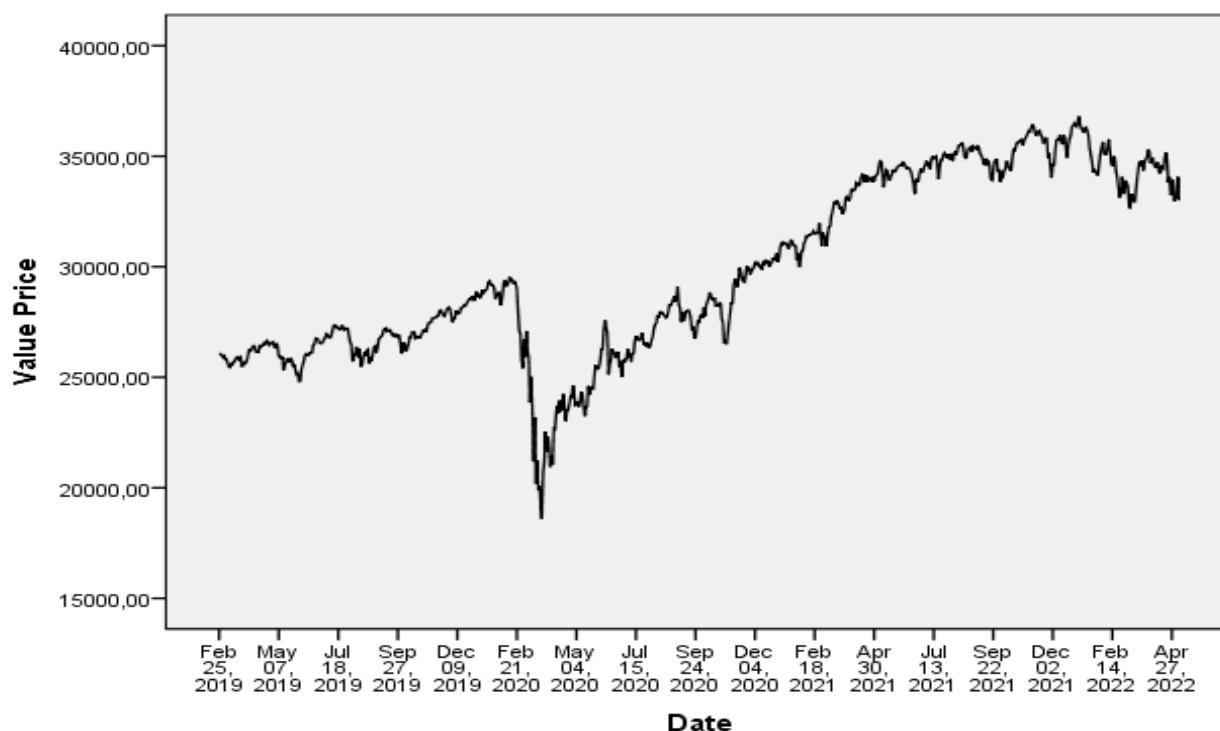
Moving Averages) и след това ще оценим акциите от индекса с модела МОКА (Модел за оценка на капиталовите активи).

МОДЕЛЪТ ARIMA

Има различни методи, с които могат да се прогнозират данни. В случая е избран моделът ARIMA(p,d,q), състоящ се от авторегресионни модели - autoregressive patterns (AR), означени с p и пълзящо средно - moving average (MA), означено с q. Моделът също може да бъде интегриран, откъдето идва I в ARIMA, степента на интегриране е съответно означена с d. Този модел може да бъде използван по два начина: авторегресионно-пълзящо средно - autoregressive-moving average (ARMA) или авторегресионни интегрирани пълзящи средни - autoregressive integrated moving averages (ARIMA). За целите на изследването са използвани модели ARIMA. Такъв вид модели са използвани в различни области, включително финанси, икономика, енергетика, транспорт и др. [2].

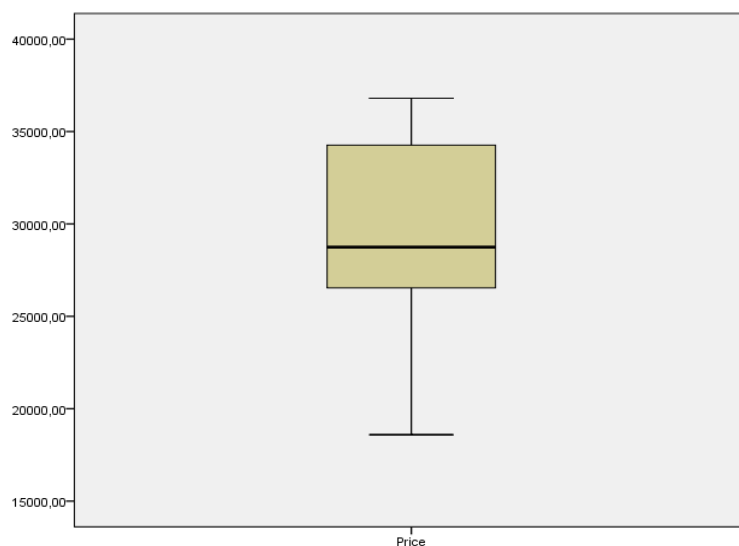
ПРОГНОЗИРАНЕ НА ЦЕНИТЕ НА ИНДЕКСА

В настоящия анализ на това изследване са разгледани данни на индекса DowJones за периода 25.02.2019 – 05.05.2022. Използвани са софтуера SPSS и Microsoft Excel. Първата стъпка е да се копират данните в SPSS и да се изчертае следната графика, за да се види как изглеждат данните, разпределени във времето (Фигура 1).



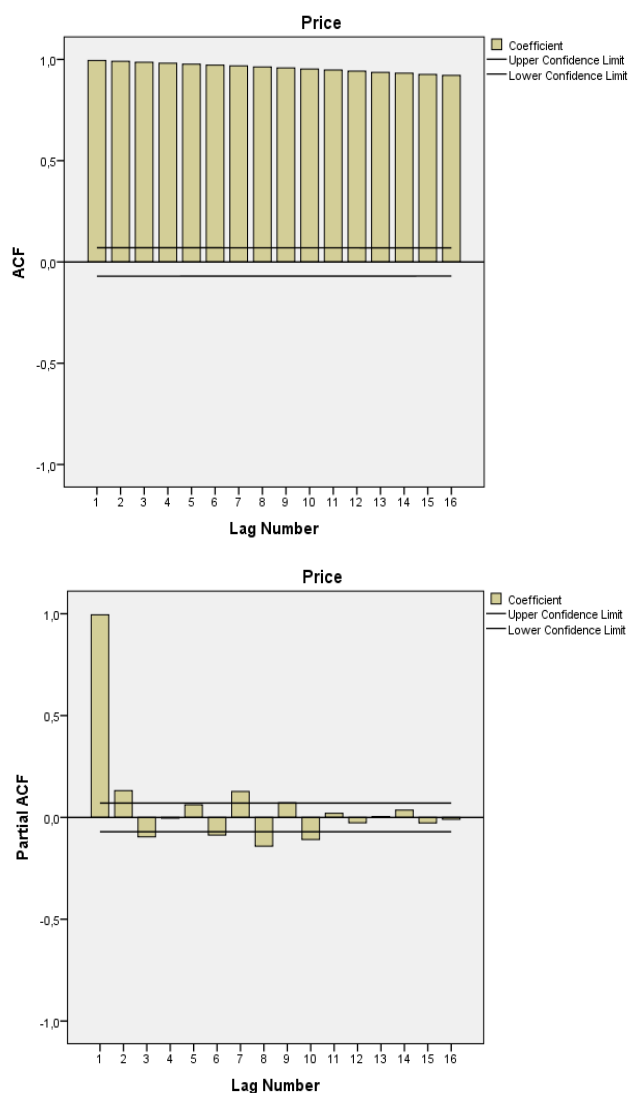
Фигура 1. Първоначални данни, разпределени във времето

Прави се проверка за outlier-и на данните чрез box-plot модел в SPSS. Не се забелязват outlier-и или други аномалии. Видимо е, че е изместена общата средна стойност. Това се дължи на очевидния спад през февруари 2020 г. Графиката на box-plot моделът е изобразена на Фигура 2.



Фигура 2. Box-plot модел

Следващата стъпка е да се изследва автокорелационната и частично автокорелационната функция (ACF и PACF) на цената (Фигура 3).



Фигура 3. Автокорелационна и частично автокорелационна функция

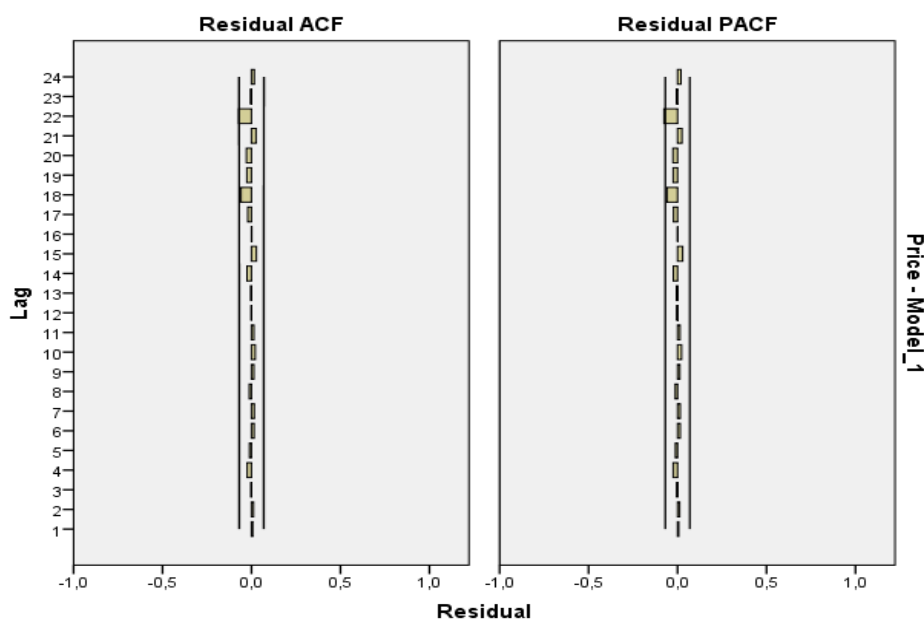
Наличието на толкова положителни стойности извън допустимите на ACF говори за необходимост от ARIMA модел. Същото се потвърждава и от графиката на Partial ACF. След

разглеждането на различни стойности за параметрите на ARIMA модел като най-подходящ е установен ARIMA(6,1,6).

Това, което доказва, че именно този е оптималният ARIMA модел е, че критерият BIC (Bayesian Information Criterion) е с минимална стойност 11.858. Този критерий произлиза от Теоремата на Бейс.[4]

Друго доказателство, че е оптимален моделът е, че няма излизания от доверителните интервали на ACF и Partial ACF (Фигура 4).

След провеждане на ARIMA модела се изчертава графика на историческите данни и направената прогноза (Фигура 5).



Фигура 4. Автокорелационна и частично автокорелационна функция за ARIMA(6,1,6)



Фигура 5. Графика на данните и направената прогноза

Следващата таблица показва оценките на коефициентите в модела за анализирания индекс (виж таблица 1).

ARIMA(p,d,q) се изразява с формулата [8]

$$\nabla y_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (1)$$

където $\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$. В резултат от получените оценки, се замества в (1) и за коефициентите, описани в таблица 1, се получава следния аналитичен вид на модела за индекса DowJones

$$\begin{aligned} \nabla Y_t = & 8.755 - 2.283\nabla y_{t-1} - 2.304\nabla y_{t-2} - 1.849\nabla y_{t-3} - 2.144\nabla y_{t-4} - 1.816\nabla y_{t-5} \\ & - 0.665\nabla y_{t-6} - 2.177 - 2.152\varepsilon_{t-1} - 1.819\varepsilon_{t-2} - 2.155\varepsilon_{t-3} - 1.763\varepsilon_{t-4} \\ & - 0.583\varepsilon_{t-5} \end{aligned}$$

Таблица 1. Оценка на коефициентите в ARIMA модела за DJIA

ARIMA Model Parameters					
		Estimate	SE	t	Sig.
Constant		8.755	12.114	.723	.470
AR	Lag 1	-2.283	.147	-15.481	.000
	Lag 2	-2.304	.274	-8.400	.000
	Lag 3	-1.849	.265	-6.966	.000
	Lag 4	-2.144	.251	-8.540	.000
	Lag 5	-1.816	.222	-8.176	.000
	Lag 6	-.665	.098	-6.789	.000
	Difference	1			
MA	Lag 1	-2.177	.153	-14.190	.000
	Lag 2	-2.152	.264	-8.162	.000
	Lag 3	-1.819	.233	-7.799	.000
	Lag 4	-2.155	.223	-9.663	.000
	Lag 5	-1.763	.218	-8.074	.000
	Lag 6	-.583	.107	-5.472	.000

ПРОГНОЗИРАНЕ НА ЦЕНИ НА НЯКОИ АКЦИИ ОТ ИНДЕКСА

В индекса Dow Jones Industrial Average се отличават 6 компании с най-силно влияние върху капитализацията [5][7]. Това са Apple Inc., Johnson & Johnson, UnitedHealth Group Incorporated, Visa Inc., The Procter & Gamble Company и Walmart Inc. За тях е направен анализ по аналогичен начин както е описано за индекса DowJones, използвайки ARIMA модели. Резултатите за избраните ARIMA модели са обобщени в следващите таблици (Таблица 2 и Таблица 3)

Таблица 2. Активите и използваните модели за тяхното прогнозиране

Име на актив	ARIMA(p,d,q)	Normalized BIC
DJIA	ARIMA(6,1,6)	11.858
Apple	ARIMA(6,1,4)	1.675

Johnson & Johnson	ARIMA(11,1,8)	1.33
UnitedHealth	ARIMA(6,1,5)	3.624
Visa	ARIMA(6,1,5)	2.627
Procter & Gamble	ARIMA(5,1,5)	1.053
Walmart	ARIMA(8,1,8)	1.139

В Таблица 2 са посочени избраните параметри за ARIMA модели. Основен критерий за избор на модел е BIC критерия.

В Таблица 3 са записани оценките на коефициентите в самите модели.

Таблица 3. Оценка на коефициентите в ARIMA моделите за анализирани активи

		DJIA	Apple	J&J	UHealth	Visa	P&G	Walmart
	Constant	8.755	0.143	0.069	0.341	0.081	0.079	0.074
AR	Lag 1	-2.283	0.050	-0.210	0.052	-0.706	-0.445	-1.252
	Lag 2	-2.304	0.941	0.145	0.314	-0.147	0.762	-0.683
	Lag 3	-1.849	-0.256	0.327	-0.436	0.144	-0.093	0.018
	Lag 4	-2.144	-0.725	0.271	0.172	0.732	-0.783	0.324
	Lag 5	-1.816	0.010	0.038	0.809	0.719	-0.119	-0.247
	Lag 6	-0.665	-0.112	-0.345	-0.124	-0.082		-1.055
	Lag 7			0.313				-0.837
	Lag 8			0.347				-0.300
	Lag 9			0.086				
	Lag 10			-0.151				
	Lag 11			-0.012				
Difference		1						
MA	Lag 1	-2.177	0.109	-0.089	0.106	-0.618	-0.294	-1.158
	Lag 2	-2.152	0.977	0.087	0.231	-0.093	0.854	-0.568
	Lag 3	-1.819	-0.262	0.341	-0.366	0.156	-0.128	0.075
	Lag 4	-2.155	-0.776	0.364	0.203	0.770	-0.638	0.392
	Lag 5	-1.763		0.086	0.755	0.678	-0.031	-0.184
	Lag 6	-0.583		-0.308				-0.923
	Lag 7			0.218				-0.712
	Lag 8			0.302				-0.161

МОДЕЛЪТ МОКА

На следващия етап ще бъдат намерени оценките на МОКА за избраните акции като за основа за пазар е разгледан индекса DowJones. Моделът за оценка на капиталовите активи (МОКА) задава връзката между очакваната възвращаемост на даден актив и риска, който може да носи. С помощта на този модел се оценява всеки един капиталов актив, тъй като е възможно да се измери неговата възвращаемост в пазарни условия.

Правят се следните основни предположения, за да се изведе класическата теория на модела:

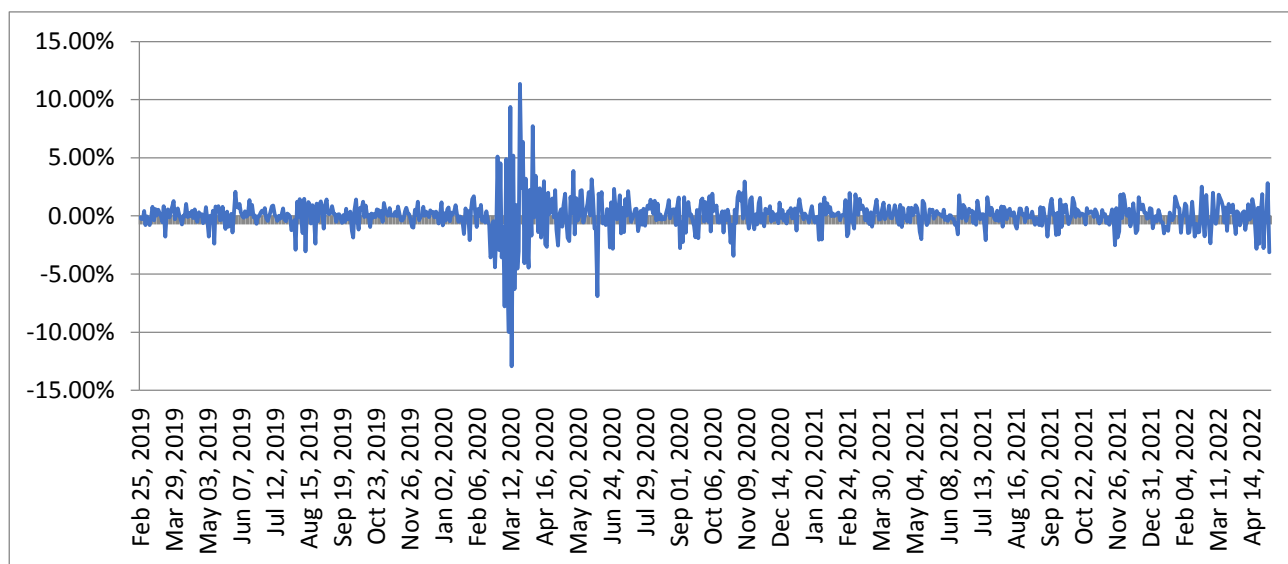
1. Всички инвеститори са рискоизбягващи и максимализират функцията на полезността.
2. Инвеститорите определят своите портфейли на базата на очакваната норма на възвращаемост и на дисперсията като измерител на риска.
3. Инвеститорите имат единичен период за инвестиционен хоризонт, който е един и същ за всеки инвеститор.

МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ ЗА DJIA

Вече има направена графика на данните във времето (фигура 1). Изчислява се процентната норма на възвращаемост по формулата

$$r_i = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

Вижда се нейното изменение на Фигура 6.



Фигура 6. Графика на възвращаемостта

ЗНАЧЕНИЕ НА БЕТА КОЕФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИЕТО ЗА МОКА

Бета коефициентът показва как ще се промени цената на дадена акция или ценна книга в зависимост от цената на пазара. Използва се за измерване на системния риск, свързан със специфичната инвестиция. Бета коефициентът участва в уравнението на линията на капиталовия пазар

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f) \cdot \beta_i \quad (2)$$

$E(r_i)$ - очакваната норма на възвращаемост на i -тия актив

r_f - нормата на възвращаемост на безрисковия актив

$E(r_m)$ - очакваната норма на възвращаемост на пазара

β_i - отношението на ковариацията между i -тия актив и възвращаемостта на пазара върху дисперсията на пазара

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{\sigma_{r_m}^2} \quad (3)$$

Ако $\beta_i < 1$ – разсейването между самия актив и пазара е малко и връщането на ценната книга е по-малко вероятно да отговори на пазарните движения

Ако $\beta_i = 1$ – цената на акцията се движи в съответствие с пазара

Ако $\beta_i > 1$ – възвращаемостта на ценната книга е по-вероятно да отговори на пазарните движения.

ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Пресмята се бета коефициента от уравнението на МОКА относно индекса DowJones. Използва се (3) за бета коефициента. Получава се 0.9705, което е по-малко от 1.

За пресмятане на очакваната норма на възвращаемост на пазара се използва следната формула

$$E(R') = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}$$

Получава се 0.04%. След като се умножи по 12 получаваме 0.48%. Това е и очакваната възвращаемост на пазара. Използва се (2).

За r_f става ясно, че възвращаемостта на петгодишните американски ДЦК е 2,73% [3]. Замества се и останалото във формулата, за да се получи очакваната норма на възвращаемост за акциите на Apple Inc.

$$E(r_i) = 0.0273 + (0.0048 - 0.0273) \cdot (0.9705) = 0.0055 = 0,55\%$$

Повтарят се същите стъпки, за да се оценят 6-те вече споменати акции от индекса DowJones. Оценени са с МОКА техните исторически данни, както и данните от прогнозата, направена с ARIMA модел. Резултатите са представени в една обща таблица (таблица 4).

Таблица 4. Обобщени данни за приложението на МОКА за оценка на акциите

Акции	β		$E(r_i)$		сфера
	исторически данни	данни от прогнозата	исторически данни	данни от прогнозата	
Apple	0.9705	1.168	0.55%	-0.14%	технологии
J&J	0.5995	0.5418	1.38%	1.40%	фармацевтика
UnitedHealth	-0.2847	0.2799	3.37%	2.04%	застраховане
Visa	1.0697	1.0634	0.32%	0.12%	финанси
P&G	0.6966	0.423	1.16%	1.69%	битова химия
Walmart	0.4640	0.5077	1.69%	1.49%	търговия

За компаниите Apple, UnitedHealth и Walmart се забелязва покачване в стойността на β -та коефициента. Единствено при Apple той успява да надвиши 1, с което се затвърждава, че тази компания ще е по-вероятно да отговори на пазарните движения.

При корпорациите на Johnson & Johnson и Procter & Gamble има спад в стойността на бета, който в случая не променя нищо и движението им остава по-малко вероятно да отговори на пазарните движения.

За компанията Visa няма почти никаква промяна в стойността, тя остава в съответствие с пазара.

При J&J и P&G има покачване в очакваната норма на възвращаемост, докато при всички останали се забелязва спад.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комбинирането на ARIMA модел с МОКА дават възможност да се оцени очакваната норма на възвращаемост за бъдещи периоди. В резултат на проведения анализ могат да се обобщят следните изводи:

1. Разгледани и анализирани са данните за периода 25.02.2019 – 05.05.2022 за индекса DowJones и водещите негови акции, на база на които са изготвени оптимални ARIMA модели с цел прогноза на бъдещи стойности.
2. На базата на историческите данни, всяка от акциите е сравнена с индекса, за да се предвиди нейната очаквана норма на възвращаемост и β -та коефициента, за да се оцени как се движи акцията спрямо пазара.
3. Повечето от акциите запазват движението си спрямо пазара и само две от тях успяват да повишат своята очакваната норма на възвращаемост.
4. Apple, която е от сферата на технологиите според прогнозата ще увеличи своя бета коефициент, но пък нормата на възвращаемост ще се понижи значително. Стабилни резултати показват J&J и P&G, които са в битовата химия и фармацевтика и най-слаба зависимост към индекса показва UnitedHealth, която е в сферата на застраховането, но пък се очаква най-висока възвращаемост за разглеждания период.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bodie, Z., A. Kane, and A. Marcus (2014), *Investments*, McGraw-Hill Education, Berkshire, 10th global ed.
- [2] Centeno, V., I.R. Georgiev, V. Mihova and V. Pavlov (2019), *Price Forecasting and Risk Portfolio Optimization*, AIP Publishing.
- [3] <https://www.cnbc.com/>, Възвращаемост на петгодишни американски ДЦК.
- [4] Cohen, N., Berchenko, Y. (2021), *Normalized Information Criteria and Model Selection in the Presence of Missing Data*, *Mathematics*, 9(19), 2474.
- [5] <https://companiesmarketcap.com/>, Най-големите компании, съставляващи DowJones
- [6] <https://finance.yahoo.com/>
- [7] <https://www.investopedia.com/>, Критерии за избор на компаниите.
- [8] Reinert, G. (2010), *Time Series*, Hilary Term.

STEFAN'S TASK FOR NONLINEAR EQUATION OF DIFFUSION IN POPULATION BIOLOGY⁵

Gabriela Milanova

Financial Mathematics Student

University of Ruse

Tel.: 087 842 9877

E-mail: gabrielamilanova9@gmail.com

Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD

Department of Mathematics

University of Ruse

Phone: 088 526 4533

E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

Abstract: We study a nonlinear diffusion in population biology. The model problem is proposed by Mimura, Yamada & Yotsutani [3] to study the distribution of invading species. We are looking for travelling wave solutions. The study had originated by the work of Russian mathematicians - Kolmogorov, Petrovsky and Piskunov [4], who in 1937 studied the diffusive equation associated with spread of advantageous gene. Although the model finds application in biology and ecology, there are some phenomena that it cannot reproduce. Stefan's problem is an adaptation of the model KPP[4], as it includes a moving boundary and admits travelling waves solutions.

Keywords: free boundary problem, travelling wave solutions, invasive population, nonlinear diffusion equation

ВЪВЕДЕНИЕ

Ще разгледаме решения от тип пътуващи вълни на нелинейната задача със свободна граница за неизвестната функция $U = U(t, x)$

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} = U(1 - U), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ U_x(t, 0) = 0, U(t, h(t)) = 0 & t > 0, \\ h'(t) = -\mu U_x(t, h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leq x \leq h_0. \end{cases} \quad (1)$$

където $h(t)$ е свободната граница, $h_0 > 0, \mu > 0$ и началната функция удовлетворява условията

$$U_0 \in C^2[0, h_0], U_0'(0) = U_0(h_0) = 0, U_0 > 0 \text{ в } [0, h_0]. \quad (2)$$

В популационната биология тази моделна задача е предложена от Mimura, Yamada & Yotsutani [3] за изучаване разпространението на нашественически видове. Основоположнически труд в тази област е работата на Колмогоров, Петровский и Пискунов [4] от 1937 г.. В работата си Du & Lin [2] доказват, че при определени условия границата $h(t)$ се мести асимптотически с постоянна скорост c .

В тази статия разглеждаме решенията на (1) от тип пътуваща вълна при предположение, че подвижната граница $h(t) = ct, t > 0$. Изложението основно следва работата на Chang & Chen [1]. Полагаме $U(t, x) = u(z)$, където $z = x - ct$. Тогава граничната задача в (1) се свежда до:

⁵ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ЗАДАЧА НА СТЕФАН ЗА НЕЛИНЕЙНО УРАВНЕНИЕ НА ДИФУЗИЯТА В ПОПУЛАЦИОННАТА БИОЛОГИЯ.

$$\begin{cases} u'' + cu' + u(1-u) = 0, z \in (-\infty, 0), \\ u(-\infty) = 1, u(0) = 0, \\ u'(0) = -\frac{c}{\mu}. \end{cases} \quad (3)$$

Ще покажем, че за всяко $\mu > 0$ съществува единствено $c_\mu > 0$, така че задача (3) има единствено класическо решение за $c = c_\mu$. Ще използваме анализ във фазовата равнина.

ИЗЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Лема 1 Нека $h(t) = ct, t > 0$. Решенията от тип пътуваща вълна на (1), получени с полагането $U(t, x) = u(x - ct)$, са решения на задача (3).

Доказателство. Полагаме $U(t, x) = u(z)$, където $z = x - ct$. Тогава $U_x(t, x) = u'(z)$, $U_{xx}(t, x) = u''(z)$, $U_t(t, x) = u'(z) \cdot (-c)$. По този начин диференциалното уравнение в (1) се преобразява в

$$-cu' - u'' = u(1-u) \Leftrightarrow u'' + cu' + u(1-u) = 0. \quad (4)$$

От условието $0 < x < h(t)$ при $h(t) = ct$ получаваме $-ct < x - ct < 0$, което при $t \rightarrow +\infty$ води до $-\infty < z < 0$. От граничното условие $U(t, h(t)) = 0, t > 0$ имаме $0 = U(t, h(t)) = u(h(t) - ct) = u(0) \Rightarrow u(0) = 0$. От другото граничното условие $U_x(t, 0) = 0, t > 0$ имаме $0 = U_x(t, 0) = u'(0 - ct)$, което при $t \rightarrow +\infty$ води до $u'(-\infty) = 0$. Оттук следва, че $u(-\infty) = \text{const}$. Като диференцираме по t горното равенство имаме $0 = U_{xt}(t, 0) = u''(0 - ct) \cdot (-c)$, което също клони към 0 при $t \rightarrow +\infty$, т.е. $u''(-\infty) = 0$. С граничен преход $z \rightarrow -\infty$ в самото диференциално уравнение получаваме

$$u(-\infty) \cdot (1 - u(-\infty)) = 0, \quad (5)$$

т.е. $u(-\infty) = 0$ или $u(-\infty) = 1$. Избираме второто от биологични съображения. Предполагаме, че при $z \rightarrow -\infty$ плътността на популацията $u(z)$ е близка до 1 и се интересуваме от разпространението на вида (т.е. от промяната на тази плътност при $z \in (-\infty, 0)$).

Накрая от условието на Стефан върху подвижната граница $h'(t) = -\mu U_x(t, h(t)), t > 0$, и от $h(t) = ct$ имаме

$$c = -\mu u'(h(t) - ct) = -\mu u'(0), \text{ т.е. } u'(0) = -\frac{c}{\mu}. \quad (6)$$

Сега разглеждаме задача (3) във фазовата равнина Oup като я записваме в еквивалентния вид на автономна система ОДУ от първи ред:

$$\begin{cases} u' = p \\ p' = -cp - u(1-u) \end{cases} \text{ за } z \in (-\infty, 0) \quad (7)$$

с гранични условия $(u, p)(-\infty) = (1, 0)$ и $(u, p)(0) = (0, -\frac{c}{\mu})$.

По метода на стрелбата фазовите криви на система (7) могат да се получат от началната задача:

$$(P_c) \quad \frac{dp}{du} = -c - \frac{u(1-u)}{p}, p(u=1) = 0. \quad (8)$$

Наистина $\frac{dp}{du} = \frac{\frac{dp}{dz}}{\frac{du}{dz}} = \frac{-cp - u(1-u)}{p} = -c - \frac{u(1-u)}{p}$. Означаваме тази задача с (P_c) и търсим c , така че нейното решение $p_c(u)$ да удовлетворява и другото гранично условие $p(u=0) = -\frac{c}{\mu}$.

Да определим стационарните точки на (7). Това са такива точки (u, p) във фазовата равнина, в които дясната страна на (7) е нулевия вектор. Имаме

$$\begin{cases} p = 0 \\ -cp - u(1 - u) = 0 \end{cases}$$

откъдето намираме две стационарни точки - $(u = 0, p = 0)$, $(u = 1, p = 0)$.

Лема 2 *Линеаризираната система за стационарната точка $(1, 0)$ е*

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} X, X = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix},$$

за която точка $(1, 0)$ е седлова $(\lambda_1 < 0 < \lambda_2)$. Собственият вектор w^2 , съответстващ на λ_2 , е $w^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, който е допирателен вектор до неустойчивото многообразие $W^u(1, 0)$ на нелинейната система (7).

Доказателство. Линеаризираната система на дадена автономна система $\dot{X} = F(x)$ в стационарна точка X^0 е $\dot{X} = AX$, където $A = DF(X^0)$ и $DF(X)$ е матрицата на Якоби за

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \text{ т.е. } DF(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

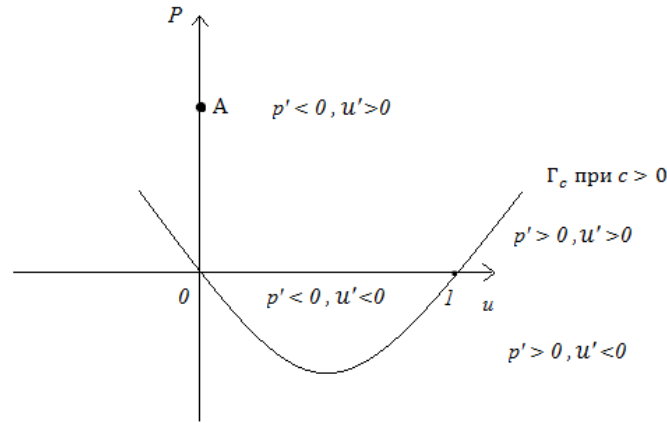
В нашия случай задача (7) е двумерна, $F(X) = \begin{pmatrix} p \\ -cp - u(1 - u) \end{pmatrix}$, $DF(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u - 1 & -c \end{pmatrix}$, $A = DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$. Собствените стойности на A са решения на уравнението $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -c - \lambda \end{pmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0$, т.е.

$$\lambda_{1/2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2}$$

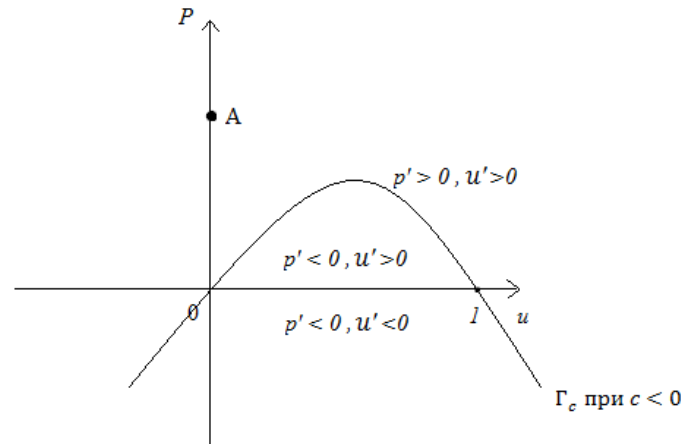
Ясно е, че $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Следователно стационарната точка $(1, 0)$ е седлова за линеаризираната система. Неустойчивото подпространство е правата с носител w^2 - собственият вектор, съответстващ на $\lambda_2 > 0$. Координатите на w^2 са решения на системата $(A - \lambda_2 E)w^2 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & -c - \lambda_2 \end{pmatrix} w^2 = 0$. За w^2 можем да вземем $w^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. $\square$

Лема 3 *u - нулклината на системата (7) е оста Ou , над нея $u' > 0$, под нея $u' < 0$. p - нулклината на (7) е параболата $\Gamma_c: p = \frac{1}{c}(u^2 - u)$, дефинирана при $c \neq 0$. Над Γ_c $p' < 0$, под Γ_c $p' > 0$ при $c > 0$. Над Γ_c $p' > 0$, под Γ_c $p' < 0$ при $c < 0$.*

Доказателство. u - нулклината по дефиниция е крива във фазовата равнина, в точките от която дясната страна на диференциалното уравнение за u' в (7) е равна на 0.


 Фигура 1. Двете нулклинни при $c > 0$

В случая това е правата $p = 0$, чиято графика е оста Ou . В точките над тази нулклина $u' > 0$, а под нея $u' < 0$. Аналогично, p - нулклината на (7) е кривата с уравнение $-cp - u(1-u) = 0$. При $c \neq 0$ това е параболата $\Gamma_c: p = \frac{1}{c}(u^2 - u)$.


 Фигура 2. Нулклинните на (7) при $c < 0$

1 случай. Нека $c > 0$. Тогава параболата Γ_c е обърната нагоре, както на фигура 1. Избираме произволна точка от фазовата равнина, нележаща на Γ_c . Например т. $A(0,1)$. Заместваме с нейните координати в израза $-cp - u(1-u)$. Имаме $-c \cdot 1 - 0 \cdot (1-0) = -c < 0$. Щом A лежи над параболата Γ_c и в A $p' < 0$, то $p' < 0$ във всички точки над Γ_c . Съответно, във всички точки под Γ_c $p' > 0$.

2 случай. Нека $c < 0$. Отново избираме произволна точка, нележаща на Γ_c . Нека отново вземем $A(0,1)$. От $p'(A) = -c \cdot 1 - 0 \cdot (1-0) = -c > 0$ следва, че за всички точки над Γ_c $p' > 0$, а за всички под Γ_c $p' < 0$.

Разглеждаме отново автономната система (7) с гранични условия $(u,p)(-\infty) = (1,0)$, $(u,p)(0) = (0, -\frac{c}{\mu})$. По метода на стрелбата търсим нейно решение като решение на задача (7) с начално условие $(u,p)(-\infty) = (1,0)$. Означаваме това решение с $p_c(u)$. От теоремата за съществуване и единственост, то съществува глобално и е единствено. За него допълнително ще изискваме да удовлетворява условието $(u,p)(0) = (0, -\frac{c}{\mu})$.

Щом $p_c(u)$ започва при $z \rightarrow -\infty$ от точката $(1,0)$, то $p_c(u)$ лежи върху неустойчивото многообразие $W^u(1,0)$.

Лема 4 За всяко $c \in \mathbb{R}$ решението $p_c(u)$ на задача (7) удовлетворява условието $p_c(u) < 0$ в интервала $(0,1)$. При това кривата $p_c(u)$ пресича нулклината Γ_c точно в една точка $u^* \in (0, \frac{1}{2}]$ при $c > 0$. В този случай $\frac{dp_c}{du} > 0$ при $u^* < u < 1$ и $\frac{dp_c}{du} < 0$ при $0 < u < u^*$.

Доказателство. 1 случай $c > 0$. Неустойчивото многообразие $W^u(1,0)$ съдържа два клона. Единият е дефиниран за $u > 1$, а другият за $u < 1$.

Първо разглеждаме клон на $W^u(1,0)$, дефиниран за $u > 1$. Наклонът на $W^u(1,0)$ е наклона на допирателния вектор $w^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, равен на $\lambda_2 = \frac{-c+\sqrt{c^2+4}}{2} = \frac{(-c+\sqrt{c^2+4})(c+\sqrt{c^2+4})}{2(c+\sqrt{c^2+4})} = \frac{2}{c+\sqrt{c^2+4}}$. Наклонът на Γ_c в $(1,0)$ е равен на производната на $p = \frac{1}{c}(u^2 - u)$ в $(1,0)$, $\left. \frac{dp_{\Gamma_c}}{du} \right|_{u=1} = \frac{1}{c}(2u - 1) \Big|_{u=1} = \frac{1}{c}$. Понеже $\frac{2}{c+\sqrt{c^2+4}} < \frac{2}{c+\sqrt{c^2}} = \frac{1}{c}$, то при $u > 1$ и u близки до 1, кривата $p_c(u)$ е под параболата Γ_c . Ще докажем, че кривата $p_c(u)$ лежи под параболата Γ_c за всяко $u \in (1, +\infty)$. Ясно е, че $p_c(u)$ е растяща функция в интервала $\in (1, +\infty)$. Наистина, от Лема 3, в точките над оста Ou ($u > 1$) и под Γ_c всички траектории на (7) удовлетворяват условието $p' > 0, u' > 0$. Следователно $\frac{dp_c}{du} = \frac{\frac{dp_c}{dz}}{\frac{du}{dz}} = \frac{p'_c}{u'} > 0$ и $p_c(u)$ е растяща функция в $(1, +\infty)$. Параболата Γ_c също расте при $u > 1$.

Ще докажем, че $p_c(u)$ не може да пресече Γ_c в никоя $u \in (1, +\infty)$. Допускаме противното. Нека $p_c(u)$ пресича Γ_c в $\bar{u} > 1$. Понеже Γ_c е p -нулклина на система (7), то производната $p'_c = \frac{dp_c}{dz} = 0$ в точките на Γ_c . Така $\frac{dp_c}{du} = \frac{\frac{dp_c}{dz}}{\frac{du}{dz}} = \frac{0}{p} = 0$ в $\bar{u}$, т.е. в $\bar{u}$ $p_c(u)$ има хоризонтална допирателна. Наклонът на Γ_c в $\bar{u}$ е $\frac{1}{c}(2\bar{u} - 1) > 0$. Следователно в $\bar{u}$ Γ_c има по-голям наклон спрямо $p_c(u)$, което означава, че близо до $\bar{u}$ Γ_c е над $p_c(u)$ и това противоречи на допускането, че $p_c(u)$ пресича Γ_c в $\bar{u}$ и близо до $\bar{u}$ $p_c(u)$ е над Γ_c .

По този начин кривата $p_c(u)$, която лежи върху $W^u(1,0)$ за $u > 1$, не може да изпълни граничното условие $p_c(0) = -\frac{c}{\mu}$ и отпада от по-нататъшни разглеждания.

Остава втория клон на $W^u(1,0)$, дефиниран за $u < 1$. От разглежданията по-горе за първия клон следва, че $p_c(u)$ е разположена над Γ_c и под оста Ou за $u < 1$ и близки до 1, т.е. $p_c(u) < 0$. От Лема 3 следва, че в областта над параболата Γ_c и под Ou всички траектории на (7) удовлетворяват условията $p' < 0, u' < 0$. Следователно $\frac{dp_c}{du} = \frac{\frac{dp_c}{dz}}{\frac{du}{dz}} = \frac{p'_c}{u'} > 0$, т.е. в областта над Γ_c и под Ou $p_c(u)$ е растяща функция на u . Ще докажем, че съществува $u^* \in (0,1)$, в която двете криви се пресичат. Допускаме противното, нека за всяко $u \in (0,1)$ $p_c(u)$ е над Γ_c . Тогава от Лема 3 $\frac{dp_c}{du} > 0$ в $(0,1) \Rightarrow p_c(u)$ е монотонно растяща в $(0,1) \Rightarrow p_c(0) < 0$. Това противоречи на условието $p_{\Gamma_c}(0) = 0$, което показва, че $p_c(u)$ и Γ_c се пресичат в някоя точка $u^* \in (0,1)$, $p'_c(u^*) = \frac{dp_c}{du}(u^*) = 0$, $p'_c(u) > 0$ в $(u^*, 1)$ и $p_c(u) < 0$ в $[u^*, 1)$. Освен това наклонът на $p_c(u)$ в u^* е по-голям или равен на наклона на Γ_c в u^* , т.е. $0 = p'_c(u^*) \geq p'_{\Gamma_c}(u^*) = \frac{1}{c}(2u^* - 1)$, откъдето $\frac{1}{c}(2u^* - 1) \leq 0 \Leftrightarrow u^* \leq \frac{1}{2}$.

От Лема 3, в точките под Γ_c и под Оста Ou $p' > 0, u' < 0$ за всички траектории на (7), следователно $\frac{dp_c}{du} < 0$ за $u \in (0, u^*)$. Понеже $p_c(u)$ лежи под Γ_c в $(0, u^*)$, то $p_c(u) < 0$ в $(0, u^*)$ и следователно в целия интервал $(0,1)$. Доказахме случай 1.

2 случай $c < 0$. От Лема 2 имаме, че стационарната точка $(1,0)$ е седло за линеаризираната система, съответна на (7) за всяко $c \in \mathbb{R}$. Отново неустойчивото многообразие $W^u(1,0)$ съдържа два клона: единият е при $u > 1$, другият е при $u < 1$. От

Лема 3 при $c < 0$ следва, че в областта над Γ_c и над оста Ou всички траектории на (7) удовлетворяват условията $p' > 0, u' > 0$. Следователно $\frac{dp_c}{du} > 0$ за всяко $u > 1, p_c$, лежаща върху този клон на $W^u(1,0)$ е монотонно растяща функция на u за $u \in (1, +\infty)$ и не може да удовлетвори граничното условие $p_c(0) = -\frac{c}{\mu}$. Затова отпада от по-нататъшни разглеждания.

Остава кривата p_c върху втория клон на $W^u(1,0)$, дефинирана при $u < 1$. Отново от Лема 3 за $c < 0$, в точките под параболата Γ_c и под оста Ou траекториите на (7) удовлетворяват $p' < 0, u' < 0$. Това означава, че $\frac{dp_c}{du} > 0$ в интервала $(0,1)$ и p_c е строго растяща функция на u в $(0,1)$. Разбира се, щом $p_c(1) = 0$, то $p_c(u) < 0$ в интервала $(0,1)$. С това завършва доказателството на Лема 4 и в този случай.

3 случай. $c = 0$. Системата (7) в този случай е

$$\begin{cases} u' = p \\ p' = -u(1-u) \end{cases}$$

От Лема 2 стационарната точка $(1,0)$ е седло. Отново неустойчивото многообразие $W^u(1,0)$ има два клона: единият при $u > 1$, другият при $u < 1$. От система (7) при $c = 0$ следва, че при $u > 1$ и $p > 0$ имаме $u' = p > 0, p' = -u(1-u) > 0$. Следователно $p_c(u)$, лежаща върху този клон на $W^u(1,0)$ е монотонно растяща функция на u в $(1, +\infty)$ и отпада от по-нататъшни разглеждания.

Точките от кривата $p_c(u)$, лежаща върху $W^u(1,0)$ при $u < 1$, удовлетворяват условията $0 < u < 1, p < 0$. От система (7) следва, че при $u \in (0,1), p < 0$ траекториите на (7) удовлетворяват условията $u' = p < 0, p' = -u(1-u) < 0$. В частност, траекторията $p_c(u)$ удовлетворява същите условия и за нея $\frac{dp_c}{du} > 0$ в $(0,1)$. Така $p_c(u)$, лежаща върху втория клон на $W^u(1,0)$ при $u \in (0,1)$, е строго монотонно растяща функция на u и щом $p_c(1) = 0$, то $p_c(u) < 0$ в $(0,1)$. Това завършва изцяло доказателството на Лема 4. $\square$

Лема 5 При $c = 0$ траекторията $p_c(u) = p_0(u)$ на (7) се записва в явен вид с формулата $p_0(u) = -(1-u)\sqrt{\frac{1+2u}{3}}$. От тази формула, както и от Лема 4 следва, че $p_0(u) < 0$ при $u \in (0,1)$.

Доказателство. При $c = 0$ система (7) е $\begin{cases} u' = p \\ p' = u^2 - u \end{cases}$ или $\frac{dp}{du} = \frac{u^2-u}{p}$. Това е обикновено диференциално уравнение от първи ред с разделени променливи, което има общо решение $\frac{p^2}{2} = \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + c$. От началното условие $p(1) = 0$ намираме $c = \frac{1}{6}$. Така горното решение се записва като $p = \pm \sqrt{\frac{2}{3}u^3 - u^2 + \frac{1}{3}}$ и понеже от Лема 4 търсим решение $p_0(u) < 0$ в $(0,1)$ избираме клона $p = -\sqrt{\frac{2}{3}u^3 - u^2 + \frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2u^3-3u^2+1}{3}}$. Чрез елементарните преобразования $2u^3 - 3u^2 + 1 = (2u^3 - 4u^2 + 2u) + (u^2 - 2u + 1) = 2u(u^2 - 2u + 1) + (u^2 - 2u + 1) = (2u + 1)(u - 1)^2$, решението се записва във вида $p_0(u) = -(1-u)\sqrt{\frac{2u+1}{3}}, u \in (0,1)$. $\square$

Лема 6 Функцията $p_c(0)$ като функция на параметъра c е растяща за всяко $c \in \mathbb{R}$.

Доказателство. От Лема 4 имаме, че за всяко $c \in \mathbb{R}$ задача (7) има единствено решение $p_c(u)$, дефинирано при $u < 1$, такова че $p_c(1) = 0$ и $p_c(u) < 0$ в интервала $(0,1)$. Разглеждаме множеството от тези решения при $u = 0, p_c(0)$. Така можем да разгледаме функцията, съпоставяща на всяко $c \in \mathbb{R}$ стойността $p_c(0)$. Ще докажем, че тази функция е монотонно растяща по c . По дефиниция, функцията $f(x)$ е монотонно растяща, ако за всеки x_1, x_2 от дефиниционното множество на $f(x)$, такива че $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) \leq f(x_2)$.

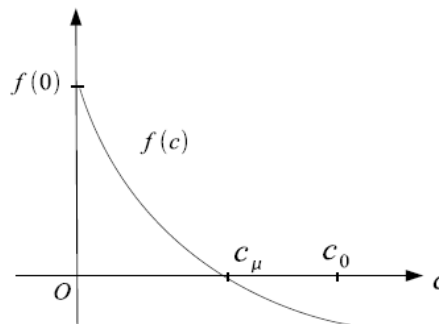
Нека $c_1 < c_2$. Ще докажем, че $p_{c_1}(0) < p_{c_2}(0)$. От горните разглеждания знаем, че наклонът на $p_c(u)$ в точка $(1,0)$ е $m_c = \frac{2}{c+\sqrt{c^2+4}}$. От елементарното неравенство $c_1 + \sqrt{c_1^2+4} < c_2 + \sqrt{c_2^2+4}$ следва, че $m_{c_2} = \frac{2}{c_2+\sqrt{c_2^2+4}} < \frac{2}{c_1+\sqrt{c_1^2+4}} = m_{c_1}$, т.е. кривата $p_{c_2}(u)$ лежи над $p_{c_1}(u)$ в близост до точката $(1,0)$ при $u < 1$. Ще докажем, че $p_{c_2}(0) \geq p_{c_1}(0)$. Допускаме противното, нека $p_{c_2}(0) < p_{c_1}(0)$. Означаваме с u_4 най-малкото $u \in (0,1)$, такова че $p_{c_2}(u) \geq p_{c_1}(u)$ в интервала $u \in [u_4, 1)$. Тогава $p_{c_2}(u_4) = p_{c_1}(u_4) = p_4$ и $\frac{dp_{c_2}}{du}(u_4) \geq \frac{dp_{c_1}}{du}(u_4)$, защото след u_4 p_{c_2} е над p_{c_1} . Но от система (7) имаме $\frac{dp_{c_2}}{du}(u_4) = -c_2 - \frac{u_4(1-u_4)}{p_4} < -c_1 - \frac{u_4(1-u_4)}{p_4} = \frac{dp_{c_1}}{du}(u_4)$, което е противоречие. Следователно не съществува такава точка $u_4 \in (0,1)$ и така $p_{c_2}(0) \geq p_{c_1}(0)$. $\square$

Лема 7 Съществува $c_0 > 0$, така че $-\frac{c_0}{\mu} - p_{c_0}(0) < 0$.

Доказателство. От Лема 4 при $c > 0$ знаем, че $W^u(1,0)$ пресича Γ_c в точка (u^*, p^*) , така че $u^* \in (0, \frac{1}{2}]$. Понеже параболата Γ_c има глобален минимум при $u = \frac{1}{2}$ и този минимум е равен на $-\frac{1}{4c}$, то $p^* \geq -\frac{1}{4c}$. Освен това кривата $p_c(u)$ има глобален минимум в u^* при $u \in [0,1]$, следователно $p_c(u) \geq p^*$ за $u \in [0,1]$ и в частност при $u = 0$ $p_c(0) > p^* \geq -\frac{1}{4c}$. Така получихме, че $p_c(0) > -\frac{1}{4c}$ за всяко $c_0 > 0$. За да докажем Лемата, трябва да намерим $c_0 > 0$, така че $p_c(0) > -\frac{c_0}{\mu}$. Искаме да изберем $c_0 > 0$, така че $p_{c_0}(0) > -\frac{1}{4c_0} > -\frac{c_0}{\mu}$. Последното неравенство е равносилно на $\frac{1}{4c_0} \leq \frac{c_0}{\mu} \Leftrightarrow 4c_0^2 - \mu \geq 0 \Leftrightarrow c_0 \geq \frac{\sqrt{\mu}}{2}$. И така, избираме $c_0 \geq \frac{\sqrt{\mu}}{2}$. Тогава $p_{c_0}(0) > -\frac{1}{4c_0} \geq -\frac{c_0}{\mu}$. Доказахме Лемата. $\square$

Лема 8 Съществува единствено $c = c_\mu > 0$, за което решението на задача (7) $p_c(u)$ удовлетворява граничното условие $p_c(0) = -\frac{c}{\mu}$.

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(c) = -\frac{c}{\mu} - p_c(0)$.



Фигура 3. Графиката на $f(c)$

От теоремата за непрекъсната зависимост на решението на задача (P_c) от параметъра c следва, че $p_c(0)$ е непрекъсната функция на c и следователно $f(c)$ е непрекъсната функция за

$c \in [0, +\infty)$. От Лема 5 знаем, че $p_0(u) = -(1-u)\sqrt{\frac{1+2u}{3}}$ за $u \in [0,1]$. В частност, при

$u = 0$ $p_0(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$. Така $f(0) = -p_0(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$. От Лема 7 знаем, че съществува

$c_0 > 0$, така че $f(c_0) = -\frac{c_0}{\mu} - p_{c_0}(0) < 0$. От теоремата на Вайерщрас за непрекъсната функция в затворен интервал следва, че щом $f(0) > 0, f(c_0) < 0$, то съществува $c_\mu \in (0, c_0)$,

така че $f(c_\mu) = 0$. Това означава, че $p_{c_\mu}(0) = -\frac{c_\mu}{\mu}$, т.е. при $c = c_\mu$ решението $p_c(u)$ минава през точката $(0, -\frac{c}{\mu})$. Освен това друго такова решение няма. От Лема 6 знаем, че функцията $p_c(0)$ е монотонно растяща за всяко $c \in \mathbb{R}$. Тогава $f(c) = -\frac{c}{\mu} - p_c(0)$ е монотонно намаляваща функция и както е показано на фиг. 3, $f(c)$ пресича оста Oc в единствена точка $c = c_\mu$. По този начин доказахме основния резултат в настоящата статия.

Теорема 1 *За всяко $\mu > 0$ съществува единствено $c = c_\mu > 0$, така че задача (3) има единствено класическо решение.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази статия разгледахме решенията от тип пътуващи вълни на нелинейната задача със свободна граница (1) като използвахме анализ във фазовата равнина. Основното предположение в разглежданията, основано на резултати на Du & Lin [2], бе че свободната граница се мести с постоянна скорост. Следвайки работата на Chang & Chen [1] показахме, че за всеки избор на параметъра $\mu > 0$ в граничното условие на Стефан съществува единствена вълна, движеща се със скорост $c = c_\mu > 0$, чийто профил е единственото решение на съответната задача (3) за автономна система обикновени диференциални уравнения. В популационната биология този резултат има отношение към скоростта на нашествие на инвазивни видове.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. Chang, C. Chen, Travelling wave solutions of a free boundary problem for a two-species competitive model, Commun. Pure Appl. Anal., 12, 2 (2013), 1065-1074.
- [2] Y. Du and Z. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 42 (2010), 377-405. Correction in: <http://turing.une.edu.au/~ydu/papers/DuLin-siam-10-correction.pdf>.
- [3] M. Mimura, Y. Yamada, S. Yotsutani, A free boundary problem in ecology, Japan J. Appl. Math. 2 (1985), 151-186.
- [4] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky and N. S. Piskunov, Etude de l'equations de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, Bull. Univ. Moscou S'er. Internat. A1 (1937), 1-6. English transl. in Dynamics of Curved Fronts, P. Pelc'e (ed.), Academic Press, 1988, 105-130.

CHARACTERISTICS AND METHODOLOGY OF THE TAX SYSTEM IN BULGARIA⁶

Mihaela Dimitrova

Financial Mathematics Student

University of Ruse

E-mail: mihaeladimitrova@icloud.com

Assoc. Prof. Iliyana Raeva

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse

E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

Abstract: *The tax is an element of the budget revenue, which is a coercive, non-refundable and gratuitous (without direct counter-benefit) payment imposed unilaterally and generally by the state. Researches show that when a country's total tax burden as a share of GDP is lower, economic growth in that country is higher. The lower taxes, more money stays in the pocket of the taxpayer, that is, with the one who made the money and has the greatest incentives to manage it effectively. Conversely, with high taxes, most of the money is in the hands of bureaucrats, and when work with foreign money and have far lower incentives to spend it efficiently. The lower the taxes, the less distortion of incentives there is in decisions about labor, savings, investment and others. This report presents the structure of the tax system in Bulgaria, examines the tax systems of some European countries, a comparative analysis is made of the two main types of tax- progressive and proportional. For the performed calculations was used PYTHON.*

Keywords: *tax system, progressive tax, proportional tax, investments.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Данъците съпътстват човека и обществото от древни времена и са в основата на икономиката на държавата. Днес, това е една от най-обсъжданите теми на медиите, политическите дискусии, изборите, международните икономически отношения. Срещаме се с тях ежедневно - при покупка на стоки и услуги, при получаване на трудово възнаграждение, когато декларираме доходите си от изминалата година, при получаване на покана за плащане на данъци върху притежаваните от нас недвижими имоти и т.н. Според класическия икономист от XIX век Дейвид Рикардо „данъците са дял от продукта на земята и труда, предоставян в разпореждане на правителството“. Влияят съществено върху дейността и конкурентоспособността както на фирмите, така и на националните икономики.

Исторически погледнато, преди да станат задължение данъците са свободно, епизодично дарение в полза на владетел на общността (племето, града-държава и т.н.), извършвано с конкретна цел (благодарност за придобитата плячка във война, израз на подчинение и др.). Първоначално те дори не са основен източник на доход за вожда, а само допълнение към богатството му. Когато човечеството е живяло с царе, императори, султани, диктатори и др., които притежавали дори и човешкия живот, те често са превръщали данъците в жесток инструмент за експлоатация на безправните поданици. Днес, всички граждани и фирми са задължени да плащат данъци, а събирането им се извършва само по силата на закони, т.е. подчинява се на строги общоизвестни и общовалидни правила. В повечето литературни източници от по-късно време справедливостта на облагането (по принцип) дори вече не се поставя под съмнение. Тя се приема за даденост, а на преден план изпъкват по-детайлни въпроси, свързани със структурирането на отделни данъци или засягащи организацията на облагането.

⁶ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ХАРАКТЕРИСТИКА И МЕТОДОЛОГИЯ НА ДАΝЪЧНАТА СИСТЕМА В БЪЛГАРИЯ.

Българското законодателство не дава легално определение на данъците. У нас за такива се приемат (на практика) всички налози, наречени данък в съответния закон (напр. Закон за данъците върху доходите на физическите лица, Закон за данъка върху добавената стойност и т.н.). В този смисъл българската практика не е изключение, защото и в законодателствата на други държави не се открива такова определение.

Прецизна дефиниция се дава в съвременното германско законодателство [1]. Според нея “данъци са всички парични плащания, не представляващи заплащане на определено благо, които са наложени с цел реализиране на приходи от публичната власт на всички онези, за които са изпълнени условията на закона.”

От това определение става ясно:

- плащанията в натура не се приемат за данък
- срещу платените данъци отделният данъкоплатец не може да очаква получаването на определено благо (напр. стока или услуга).
- данъци могат да бъдат налагани само от публичната власт
- данъци могат да се налагат само въз основа на закон, с цел реализиране на приходи от публичната власт.
- реализирането на приходи може да не е основна, а вторична цел на данъчното облагане

ОСНОВНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ДАНЪЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

2.1 Видове данъци и структура на данъчната система /съгл. сайта на министерството на финансите/



Фигура 1 Структурата на данъчната система в България

На Фигура 1 е представена структурата на данъчната система в България. Чрез нея е представено по какъв начин се разделя данъчната система: кои данъци постъпват в държавния бюджет и кои в местните бюджети.

2.2 Икономически характеристики на видовете данъчни системи

Повечето от държавите в Европейския съюз са възприели една от двете системи за облагане на доходите - “прогресивната система” или “пропорционалната система”.

При *прогресивната система* на данъчно облагане данъчната ставка се изменя по предварително избрана прогресия, а данъчното задължение нараства прогресивно с увеличаване на данъчната основа. Тази система на облагане води до промяна в

съотношението на доходите, установено преди данъчното облагане. Ето защо този вид данъчно облагане е по-изгодно за по-ниските доходи и по-неизгодно за по-високите доходи.

При *пропорционалната система на облагане* размерът на данъчната ставка остава един и същ, а данъчното задължение се изменя пропорционално с изменението на данъчната основа. Този вид данъчно облагане не води до промяна в съотношението на доходите преди и след облагането. За това тази система е приемлива форма за облагане както на високите, така и на ниските доходи и изглежда обективна и справедлива.

В утвърдилата се данъчна практика в повечето държави от Европейския съюз се приема, че прогресивната система на данъчно облагане е по-подходяща за облагане на доходите на физическите лица, докато пропорционалната система е подходяща за облагане на печалбите на фирмите. Прогресивната и пропорционалната система на данъчно облагане се прилагат различно в държавите членки на ЕС[2].

2.3 Данъчните системи в Европейските държави

Държава	Прогресивна система	Пропорционална система
Скандинавски страни и Нидерландия	Доходите на физическите лица	На печалбите на фирмите
България	Доходите на физическите лица	На печалбите на фирмите
Естония	Доходите на физическите лица и на печалбите на фирмите	
Русия	Доходите на физическите лица	На печалбите на фирмите
Словения	Доходите на физическите лица и на печалбите на фирмите	
Сърбия	Доходите на физическите лица и на печалбите на фирмите	

Таблица 2. Данъчните системи в Европейските държави

Само в 6 страни, включително и България, съществува пропорционална система на облагане. Всички останали 34 държави използват прогресивна скала или смесен тип на облагане. Следователно, всички страни, които прилагат плосък данък по света, се намират в Европа.

* В 11 от 40-те европейски държави съществува необлагаем минимум, вкл. В такива с развити икономики, като Франция, Австрия, Норвегия и Испания.

* Въпреки че България притежава един от най-ниските корпоративни данъци върху печалбата в Европа, това не се отразява благоприятно както на вътрешните инвестиции, така и на преките чуждестранни инвестиции. През последните 10 години те значително намаляват и се установяват на нива.

2.4 Плоския данък в България – добри и лоши страни

Облагането на доходите на физическите лица и печалбите на фирмите по системата на пропорционалното данъчно облагане се нарича още облагане *с плосък данък*. Системата на плоския данък означава въвеждането на единна данъчна ставка за облагане на доходите както на физическите лица, така и на фирмите, независимо от размера на дохода. Тоест с плоския данък на практика се облагат с една и съща данъчна ставка доходите на всички -и на бедни, и на богати. Важно изискване е данъчната ставка да бъде само една и също така да бъде относително ниска по своя размер. Друго важно условие е данъчният праг да бъде еднакъв за всички данъкоплатци и достигането му да води до задължение за плащане на дължимия данък.

Плосък данък	Плюсове	Минуси
България	Бизнесът трупа повече пари	Въвеждане на данък общ доход, дори за суми под 200лв.
	Повече инвестиции и предприемаческа активност	Премахнат е годишен необлагаем минимум от 2400лв.
	Намаляване на дяла на сивата икономика	Големи фирми, дружества и компании отчитат високи печалби, надхвърлящи понякога 50-60%. Тези свръхпечалби се облагат с 10%.
	Създаване на допълнителни работни места	Търговците спекуланти също плащат само 10% данък върху безбожната си печалба, и то ако не са я укрили.

Таблица 3. Предимства и недостатъци на плоския данък

Тъй като системата на плоския данък зависи от данъчната основа и от данъчната ставка, има вероятност новата система да създаде предпоставки за заплащане на по-висок размер на данъка върху доходите от страна на лицата с ниски и средни доходи. Ето защо може да се подчертае, че въвеждането на системата на плоския данък зависи основно от размера на данъчната основа.

СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА РЕАЛНИТЕ ДОХОДИ НА НАСЕЛЕНИЕТО В БЪЛГАРИЯ ПРЕЗ ПОСЛЕДНИТЕ 10 ГОДИНИ ПО ОТНОШЕНИЕ НА РАЗЛЪЧНИТЕ ВИДОВЕ ДАΝЪЧНИ СИСТЕМИ

На Таблица 4 са представени средните работни заплати за последните 10 години и са пресметнати стойностите на плоския и прогресивен данък за съответните работни заплати. Изчисленията са направени с помощта на Python.

```

7  if razmer_godishna_zaplata < 9168:
8      chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 1
9      print(f"данък 0% за размер годишна заплата до 9168 евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
10 elif 9168 <= razmer_godishna_zaplata < 13966:
11     chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.86
12     print(f"данък 14% за размер годишна заплата между (9168 - 13966) евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
13 elif 13966 <= chista_zaplata_de < 54949:
14     chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.76
15     print(f"данък 24% за размер годишна заплата между (13966 - 54949) евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
16 elif 54949 <= chista_zaplata_de < 250532:
17     chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.58
18     print(f"данък 42% за размер годишна заплата между (54949 - 250532) евро - РЕЗУЛТАТ:"
19           f"{chista_zaplata_de:.2f}euro")
20 else:
21     chista_zaplata_de = razmer_godishna_zaplata * 0.55
22     print(f"данък 45% за размер годишна заплата над 250532 евро - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_de:.2f}euro")
23 elif dyrjava == "BG":
24     chista_zaplata_bg = razmer_godishna_zaplata * 0.78
25     print(f"данък 22% - РЕЗУЛТАТ:{chista_zaplata_bg:.2f}лева")

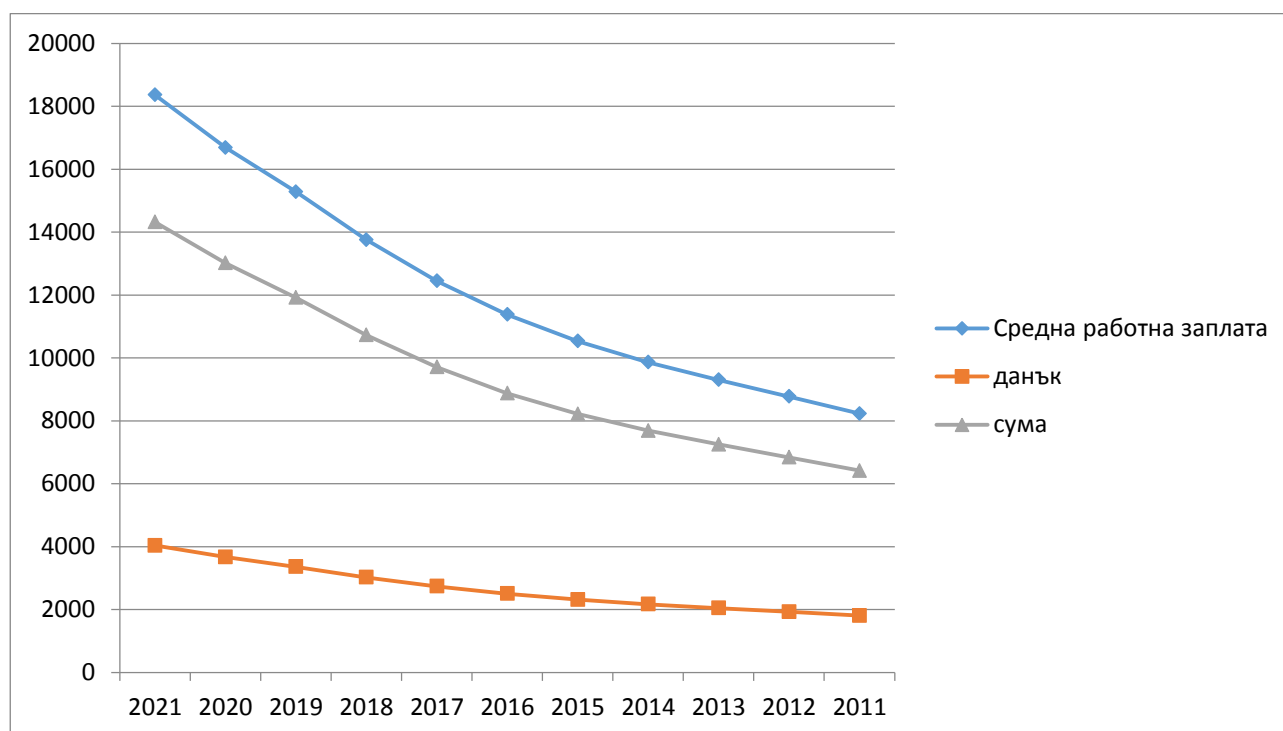
```

Таблица 4. Част от програмен код

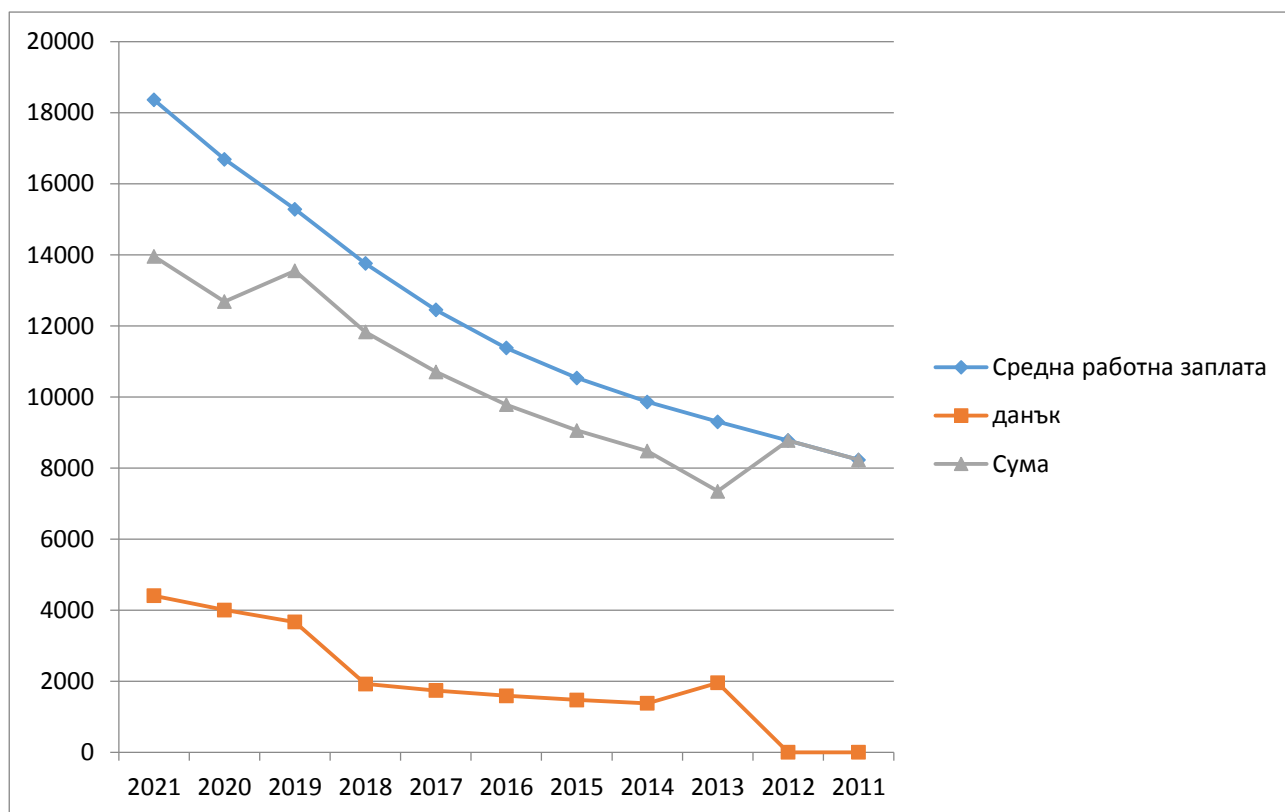
Представена е част от програмния код, с помощта на който е пресметната Таблица 4. За пресмятане на примерна годишна заплата, ако е въведен прогресивен данък са използвани проценти, които важат за Германия.

година	Средна работна заплата	Пропорционален данък		Прогресивен данък	
		сума	данък	Сума	данък
2021	18359	14320.02	4038.98	13952.84	4406.16
2020	16687	13015.02	3671.98	12682.12	4004.88
2019	15283	11920.74	3362.26	11615.08	3667.92
2018	13755	10728.90	3026.10	11829.30	1925.70
2017	12448	9709.44	2738.56	10705.28	1742.72
2016	11379	8875.62	2503.38	9785.94	1593.06
2015	10535	8217.30	2317.70	9060.10	1474.90
2014	9860	7690.80	2169.20	8479.6	1380.40
2013	9301	7254.78	2046.22	7345.76	1955.24
2012	8773	6842.94	1930.06	8773	0
2011	8230	6419.40	1810.06	8230	0

Таблица 4. Доходи на населението при двата вида данък



Графика 1. Пропорционален данък



Графика 2. Прогресивен данък

АНАЛИЗ НА ПОЛУЧЕНИТЕ РЕЗУЛТАТИ

При прогресивния данък данъчната ставка расте заедно с данъчната основа. Такъв е данъкът върху доходите на физическите лица в България до 2008 год. След въвеждането на пропорционалния данък, няма информация за процента, който е използван последно при прогресивния данък. Както се вижда прогресивния данък расте заедно с увеличаването и на средната работна заплата. Хора със силно вариращо трудово възнаграждение е възможно през някои месеци да не получат доходи, а през други те да са високи. При пропорционален данък сборът от сумите, които се плащат месечно е равна на годишното задължение. При прогресивен данък първо се плащат месечните задължения, след края на годината се изчислява годишното задължение и накрая се установява разликата.

ИЗВОДИ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи за ефекта на въвеждане на плоския данък в България :

- ❖ Повишена е средната работна заплата;
- ❖ Въвеждането на системата на плоския данък зависи основно от размера на данъчната основа;
- ❖ Създадени са допълнителни работни места.

Плоският данък не допринася в борбата на държавата със сивата икономика. Това на практика елиминира и един от основните мотиви за въвеждането на пропорционална скала на облагане.

Плоския данък без необлагаем минимум облагодетелства високодоходните групи, като те разполагат с допълнителен ресурс от лични доходи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Desislava Nikolova, Petar Ganey (2016), *Flat tax in Bulgaria*

[2] Lubka Cenova (2004), *Doctor of Tax Law*, Trud I pravo.

[3] Peshev, P. (2015). Analysis of the Wealth Inequality Dynamics in Bulgaria: Different Approach. Issue 4.

Интернет източници:

[4] Всичко, което трябва да знаете за данъците и обезщетенията в Германия (taxback.com)

[5] Министерство на финансите :: Начало (minfin.bg).

[6] ДАНЪК - Общ списък на понятия – УНИВЕРСИТЕТСКИ РЕЧНИК – ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ – Нов български университет (nbu.bg).

[7] <https://weknowthelaw.eu/данъчно-облагане-в-германия/>

[8] <https://germany.sophista.info/danachni-klasove-germania/>

[9] https://www.eu-gleichbehandlungsstelle.de/eugs-bg/граждани-на-европейския-съюз/живот-и-работа-в-германия/данъци?id=Was_für_Steuerklassen_gibt_es_in_Deutschland

[10] <http://library.fes.de/pdf-files/bueros/sofia/15330.pdf>.

ANALYSIS OF VARIANCE (ANOVA)⁷

Preslava Dimitrova

Financial Mathematics Student,
University of Ruse
E-mail: preslava252@gmail.com

Prof. Velizar Pavlov, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse
E-mail: vpavlov@uni-ruse.bg

Abstract: *The purpose of analysis of variance is to examine the presence or absence of a significant influence of any qualitative or quantitative factor on changes in the studied characteristics. Analysis of variance is a method of great complexity in many different variations, each of which is applied in a specific experimental context.*

Keywords: *Analysis of variance, Fisher analysis of variance, One-Way ANOVA, Two-Way ANOVA.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Целта на дисперсионния анализ е да се проучи наличието или отсъствието на значително влияние на какъвто и да е качествен или количествен фактор върху промените в изследваните характеристики. Дисперсионният анализ е метод с голяма сложност в много различни вариации, всяка от които се прилага в конкретен експериментален контекст. За целта факторът, имащ или не оказващ значително влияние, се разделя на градационни класове (с други думи, групи) и се установява дали влиянието на фактора е едно и също чрез изследване на значимостта между средните в наборите от данни, съответстващи на градациите на фактора. Минималният брой градационни класове (групи) е два. Класовете за оценяване могат да бъдат качествени или количествени.

Методите за t- и z-тест, разработени през 20-ти век, се използват за статистически анализ до 1918 г., когато Роналд Фишър създава метода за анализ на дисперсията. [1, 2] ANOVA се нарича още анализ на вариацията на Фишер и е разширение на t- и z-тестовете. Терминът става добре известен през 1925 г., след като се появява в книгата на Фишър „Статистически методи за научни работници“ [3].

Дисперсионният анализ е почти универсален метод за тестване на различията в групите, тъй като се използва както в техническите науки и маркетинговите науки, така и в изследванията на човешкото поведение. Анализът изследва съотношението на две вариации. Дисперсията е мярка за разсейването на данните около средната стойност. Първо - дисперсията, обяснена с влиянието на фактора, която характеризира разсейването на стойностите между градациите на фактора (групите) около средната стойност на всички данни. Второ - необяснимата дисперсия, която характеризира разпръскването на данните в градациите (групи) около средните стойности на самите групи. Първата дисперсия може да се нарече междугрупова, а втората – вътрешногрупова. Съотношението на тези вариации се нарича действително съотношение на Фишер и се сравнява с критичната стойност на съотношението на Фишер.

Ако действителното съотношение на Фишер е по-голямо от критичното, тогава средните класове на градация се различават един от друг и изследваният фактор значително влияе върху промяната в данните. Ако е по-малко, тогава средните градационни класове не се различават един от друг и факторът няма значителен ефект.

⁷ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27. 05. 2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ДИСПЕРСИОНЕН АНАЛИЗ (ANOVA).

В настоящата работа е разгледан дисперсионният анализ, като е представен пример от практиката.

При дисперсионният анализ се определя специфичното тегло на общото въздействие на един или повече фактори. Значимостта на влиянието на фактора се определя чрез тестване на хипотези:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$, където a - брой градационни класове - всички градационни класове имат една и съща средна стойност

H_1 : не всички μ_i са равни - не всички класове на градация имат една и съща средна стойност

Ако влиянието на даден фактор не е значително, тогава разликата между класовете на градация на този фактор също е незначителна и нулевата хипотеза H_0 не се отхвърля по време на анализа на дисперсията. Ако влиянието на фактора е значително, тогава нулевата хипотеза H_0 се отхвърля: не всички класове на градация имат една и съща средна стойност, тоест сред възможните разлики между класовете на градация един или повече са значими.

В зависимост от броя на оценяваните фактори се разграничават еднофакторен, двуфакторен и многофакторен дисперсионен анализ.

Еднофакторен дисперсионен анализ: същност на метода, формули, примери

Еднофакторният дисперсионен анализ се основава на факта, че сумата от квадратните отклонения на статистическия комплекс може да бъде разделена на компоненти:

$$SS = SS_a + SS_e,$$

Където:

SS – обща сума на квадратите отклонения

SS_a – обясним сбор от квадрати отклонения или сума от квадрати отклонения

SS_e – необясним сбор от квадрати отклонения или сбор от квадрати отклонения на грешката.

Ако обозначим с n_i броя на опциите във всеки клас на градация (група) и a е общият брой градации на фактора (групи), тогава:

$$\sum_{i=1}^a n_i = n$$

общия брой на наблюденията и можете да получите следните формули

$$SS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2$$

общ брой квадратни отклонения:

$$SS_a = \sum_{i=1}^a n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

сумата от квадратните отклонения, обяснени с влиянието на фактор a :

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

сума от квадратни отклонения на грешката:

където:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

обща средна стойност на наблюденията

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

средната стойност на наблюденията във всяка градация на фактора (група).

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) s_i^2 =$$

$$\text{Освен това} = (n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2 + \dots + (n_a - 1) s_a^2,$$

където s_i^2 е дисперсия на градационния фактор (група).

За да се извърши еднофакторен дисперсионен анализ върху данните от статистически комплекс, трябва да намерите действителното съотношение на Фишър - съотношението на дисперсията, обяснено с влиянието на фактора (междугрупова) и необяснимата дисперсия (вътрешногрупова):

$$F = \frac{MS_a}{MS_e}$$

и се сравнява с критичната стойност на Фишер F_{α, n_a, n_e}

Отклоненията се изчисляват, както следва:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a - 1} \text{ за междугрупова дисперсия}$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{n - a} \text{ за вътрешногрупова дисперсия}$$

при което,

$n_a = a - 1$ - брой степени на свобода на междугрупова дисперсия

$n_e = n - a$ - брой степени на свобода на вътрешногрупова дисперсия

$n = n - 1$ - обща сума на степени на свобода

Ако действителната стойност на коефициента на Фишер е по-голяма от критичната стойност $F < F_{\alpha, n_a, n_e}$, тогава нулевата хипотеза се отхвърля с ниво на значимост α . Това означава, че факторът влияе значително върху промяната в данните и данните са зависими от фактора с вероятност $P = 1 - \alpha$.

Пример:

Необходимо е да се установи дали видът на използваните суровини влияе върху печалбата на предприятието. В шест градационни класа (групи) на фактора (тип 1, тип 2 и др.) са събрани данни за печалбата от производството на 1000 единици продукти за 4 години.

Таблица 1

Вид на суровината	2018	2019	2020	2021	Средна стойност $\bar{x}_i$	Дисперсия s_i^2
1-й	7,21	7,55	7,29	7,6	7,413	0,0367
2-й	7,89	8,27	7,39	8,18	7,933	0,1571
3-й	7,25	7,01	7,37	7,53	7,290	0,0480
4-й	7,75	7,41	7,27	7,42	7,463	0,0414
5-й	7,7	8,28	8,55	8,6	8,283	0,1706
6-й	7,56	8,05	8,07	7,84	7,880	0,0563

Броят на класовете (групите) на факторната градация е $a = 6$ и във всеки клас (група) $n_i = 4$ наблюдения. Общият брой на наблюденията $n = 24$.

Изчисляване на степените на свобода:

$$n_a = a - 1 = 6 - 1 = 5,$$

$$n_e = n - a = 24 - 6 = 18,$$

$$v = n - 1 = 24 - 1 = 23.$$

Изчисляване на сумите на квадратните отклонения:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n} = \frac{185,04}{24} = 7,71,$$

$$\begin{aligned} SS_a &= \sum_{i=1}^a n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \\ &= 4 \bullet (7,413 - 7,71)^2 + 4 \bullet (7,933 - 7,71)^2 + \dots + \\ &+ 4 \bullet (7,880 - 7,71)^2 = 2,9293, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_e &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) s_i^2 = \\ &= (n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2 + \dots + (n_6 - 1) s_6^2 = \\ &= 3 \bullet 0,0367 + 3 \bullet 0,1571 + \dots + 3 \bullet 0,0563 = \\ &= 1,5303, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2 = \\ &= (7,21 - 7,71)^2 + (7,89 - 7,71)^2 + \dots + \\ &+ (7,84 - 7,71)^2 = 4,4596, \end{aligned}$$

Изчисляване на дисперсията:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a - 1} = \frac{2,9293}{5} = 0,58586,$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{n - a} = \frac{1,5303}{18} = 0,085017$$

Изчисляване на фактическия коефициент на Фишер:

$$F = \frac{MS_a}{MS_e} = \frac{0,58586}{0,085017} = 6,89$$

Критично значение на съотношението на Фишер:

$$F_{0,05;5;18} = F.OBP(0,05, 5, 18) = 2,77$$

Тъй като действителното съотношение на Фишър е по-голямо от критичното:

$$F = 6,89 > F_{0,05;5;18} = 2,77$$

с ниво на значимост $\alpha = 0,05$, заключаваме, че печалбата на предприятието, в зависимост от вида на използваните в производството суровини, се различава значително.

Или, отхвърляме основната хипотеза (H_0) за равенството на средните във всички класове на факторна градация (групи).

Двухфакторен дисперсионен анализ: същност на метода, формули, пример

Двухфакторният дисперсионен анализ се използва за проверка на възможната зависимост на два фактора - А и В. Тогава а е броят на градациите на фактор А и b е броят на

градиациите на фактор В. В статистическия комплекс, сумата от квадратните остатъци се разделя на три компонента:

$$SS = SS_a + SS_b + SS_e,$$

където:

$$SS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \left(X_{ij} - \bar{X} \right)^2$$

обща сума на квадратите отклонения

$$SS_a = b \sum_{i=1}^a \left(\bar{X}_i - \bar{X} \right)^2$$

сумата от квадратните отклонения, обяснени с влиянието на фактор

A

$$SS_b = a \sum_{j=1}^b \left(\bar{X}_j - \bar{X} \right)^2$$

сума от квадратните отклонения, обяснени с фактор В

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \left(X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X} \right)^2$$

сума от квадрати отклонения на грешката

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b X_{ij}$$

обща средна стойност на наблюденията

$$\bar{X}_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b X_{ij}$$

средна стойност на наблюденията във всяка градация на фактор А

$$\bar{X}_j = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a X_{ij}$$

средният брой наблюдения във всяка градация на фактор В.

Отклоненията се изчисляват, както следва:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a-1}$$

дисперсия, обяснена с фактор А

$$MS_b = \frac{SS_b}{b-1}$$

дисперсия, обясненна влиянием фактора В,

$$MS_e = \frac{SS_e}{(a-1)(b-1)}$$

дисперсия на грешката,

където,

va = a - 1 - броят на степените на свобода на дисперсията, обяснен с влиянието на фактор А

vb = b - 1 - броят на степените на свобода на дисперсията, обяснен с влиянието на фактор В

ve = (a - 1)(b - 1) - дисперсия на грешката

v = ab - 1 - общия брой степени на свобода.

Ако факторите са независими един от друг, тогава се излагат две нулеви хипотези и съответните алтернативни хипотези, за да се определи значимостта на факторите:

H0: $\mu_{1A} = \mu_{2A} = \dots = \mu_{aA}$,

H1: не всички μ_{iA} са равни

H0: $\mu_{1B} = \mu_{2B} = \dots = \mu_{aB}$,

H1: не всички μ_{iB} са равни.

За да определите ефекта на фактор А, се нуждаете от действителното съотношение на

$$F_a = \frac{MS_a}{MS_e}$$

Фишер се сравни с критичното съотношение на Фишер $F_{\alpha, a, b}$

За да определите ефекта на фактор В, се нуждаете от действителното съотношение на

$$F_b = \frac{MS_b}{MS_e}$$

Фишер се сравни с критичното съотношение на Фишер $F_{\alpha, a, b}$

Ако действителното съотношение на Фишер е по-голямо от критичното съотношение на Фишер, тогава нулевата хипотеза трябва да бъде отхвърлена с ниво на значимост α . Това означава, че факторът оказва значително влияние върху данните: данните зависят от фактора с вероятност $P = 1 - \alpha$.

Ако действителното съотношение на Фишер е по-малко от критичното съотношение на Фишер, тогава нулевата хипотеза трябва да се приеме с ниво на значимост α . Това означава, че факторът не влияе съществено върху данните с вероятност $P = 1 - \alpha$.

Пример:

Дава се информация за средния разход на гориво на 100 километра в литри, в зависимост от обема на двигателя и вида на горивото.

Таблица 2

	Оловен бензин	Безоловен бензин	Дизел	Средна стойност $\bar{X}_i$
1001-1500 см ³	9,3	8,9	6,5	8,23
1501-2000 см ³	9,4	9,1	7,1	8,53
Над 2000 см ³	12,6	9,8	8,0	10,13
Средна стойност $\bar{X}_j$	10,42	9,27	7,2	

Необходимо е да се провери дали разходът на гориво зависи от обема на двигателя и вида на горивото.

Решение. За фактор А, броят на градационните класове $a = 3$, за фактор В, броят на градационните класове $b = 3$.

Изчисляват се сумите на квадратните отклонения:

$$SS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (X_{ij} - \bar{X})^2 = 24,72$$

$$SS_a = b \sum_{i=1}^a (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = 6,26$$

$$SS_b = a \sum_{j=1}^b (\bar{X}_j - \bar{X})^2 = 16,09$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2 = 2,37$$

Изчисляват се дисперсиите:

$$MS_a = \frac{SS_a}{a-1} = \frac{6,26}{3-1} = 3,13$$

$$MS_b = \frac{SS_b}{b-1} = \frac{16,09}{3-1} = 8,04$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{(a-1)(b-1)} = \frac{2,37}{(3-1)(3-1)} = 0,59$$

$$F_a = \frac{MS_a}{MS_e} = \frac{3,13}{0,59} = 5,28$$

Действителното съотношение на Фишър за фактор А критичната стойност на коефициента на Фишер: $F_{\alpha;v_a,v_e} = F_{0,05;2;4} = 6,94$. Тъй като действителното съотношение на Фишер е по-малко от критичното, с вероятност от 95% приемаме хипотезата, че обемът на двигателя не влияе на разхода на гориво. Въпреки това, ако изберем ниво на значимост от $\alpha = 0,1$, тогава действителната стойност на съотношението на Фишер $F_{0,1;2;4} = 4,32$ и тогава с вероятност от 95% можем да приемем, че размерът на двигателя влияе на разхода на гориво.

$$F_b = \frac{MS_b}{MS_e} = \frac{8,04}{0,59} = 13,56$$

Действителното съотношение на Фишър за фактор В критичната стойност на коефициента на Фишер: $F_{\alpha;v_b,v_e} = F_{0,05;2;4} = 6,94$. Тъй като действителното съотношение на Фишер е по-голямо от критичната стойност на коефициента на Фишер, ние приемаме с 95% вероятност, че видът на горивото влияе върху неговата консумация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Дисперсионният анализ или ANOVA е статистически метод, който разделя наблюдаваните данни на различни компоненти, които да се използват за допълнителни тестове.
2. Еднофакторният ANOVA се използва за три или повече групи данни, за да се получи информация за връзката между зависимите и независимите променливи.
3. Ако не съществува истинска дисперсия между групите, F-коефициентът на ANOVA трябва да е близо до 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ronald Fisher. "The Correlation between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance." Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 52(2), 1918. Pages 399-433
- [2] Encyclopaedia Britannica. "Sir Ronald Aylmer Fisher." Accessed Aug. 10, 2020
- [3] Ronald Fisher. "Statistical Methods for Research Workers." Springer-Verlag New York, 1992.

MODEL FOR PRICING OF CAPITAL ASSETS⁸

Marinela Dimitrova

Financial Mathematics Student

University of Ruse

E-mail:marineladimitrov@gmail.com

Prof. Dr. Iliyana Raeva,

Department of Applied Mathematics and Statistics

University of Ruse

E-mail: iraeva@uni-ruse.bg

Abstract: The Capital Asset Valuation Model (MOCA) is used to find the expected rate of return on an asset. The model describes the relationship between expected return and systemic risk. Systemic risk, also known as market risk, is formed under the influence of external factors that do not depend on the immediate participants in the transaction and cannot be reduced by diversification.

Keywords: The Capital Asset Valuation Model, Beta coefficient, Market risk

ВЪВЕДЕНИЕ

Тази статия представя аналитичното значение и смисъл на бета коефициента в уравнението за МОКА. Моделът за оценка на капиталовите активи (МОКА) се използва за намиране на очакваната норма на възвръщаемост на определен актив. Моделът описва отношението между очакваната доходност и системния риск. Системният риск, известен още като пазарен, се формира под въздействието на външни фактори, които не зависят от непосредствените участници в сделката и не може да бъде редуциран чрез диверсификация. Неговото влияние се разпростира върху всички инвеститори.

Очакваната норма на възвръщаемост се пресмята чрез следната формула:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f), \quad (1)$$

където:

$E(R_i)$ – очаквана норма на възвръщаемост на i -тия актив

R_f – норма на възвръщаемост на безрисковия актив

$E(R_m)$ – очаквана норма на възвръщаемост на пазара

β_i – показател за систематичен риск

1. Приложение на модела

Като пример за приложение на модела да вземем международна верига от кафета „Старбъкс Корпорейшън“ (Starbucks Corporation). Нейната централа е в Сиатъл, щата Вашингтон, САЩ, където е открито първото им кафене. Това е най-голямата компания в кафеения бизнес в света. „Старбъкс“ предлага топли и студени напитки, кафе на зърна, инстантно кафе, чай, сладкиши и закуски. Повечето кафенета от веригата предлагат и пакетирани хранителни стоки, студени и топли сандвичи. Също така „Старбъкс“ има собствена марка сладолед. От своето основание през 1971 година компанията „Старбъкс“ започва да се разширява с бързи темпове. Откриват се средно по 2 нови кафенета всеки ден. В началото на 1980 г. компанията „Старбъкс“ е била рентабилна, но в края на 1980 година губи пари поради експанзията в Средния запад и Британска Колумбия. [1], [2]. През 1990 г. компанията има малка печалба. В периода на разширението на дейността си в Калифорния

⁸ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИ АКТИВИ.

през 1991 година компанията „Старбъкс“ става модерна. Първото заведение на компанията „Старбъкс“ извън САЩ или Канада е открито в средата на 1990-те години. През 2009 г. веригата планира да отвори 900 нови обекта извън САЩ, но обявява, че смята да затвори 300 магазина в САЩ от 2008 г. насам. Притежава 16 635 кафенета в 49 държави. Най-много кафета има в САЩ (общо над 11 000 бр.), България, Канада, Япония и др. Първото заведение от веригата отваря врати през 30 март 1971 година в Сиатъл. Собственици на обекта са 3 приятели: учителят по английски Джери Болдуин, учителят по история Зев Сейгъл и писателят Гордън Болкер. Те били вдъхновени от предприемача Алфред Пийт да се захванат с този бизнес. Първоначално компанията е носила името „Пекуод“, но това име е отхвърлено и компанията е наречена „Старбъкс“ [3].

ТАБЛИЦА ЗА СТОЙНОСТИТЕ НА ИНДЕКСА S&P500 ЗА 5 ГОДИНИ В МЕСЕЧНИ ДАННИ

Разглеждаме симулирана таблица на стойностите на индекса S&P500 за 5 години в месечни данни от 1 ви февруари 2017г. до 1 ви януари 2022 г. и са сравнени със стойностите на акциите на Starbucks. Пресметната е нормата на възвръщаемост в проценти (Percentage returns). Тези данни са посочени в Таблица 1.

Таблица 1. Таблица на стойностите на индекса S&P500 за 5 години в месечни данни

Date	Starbucks Price	Starbucks Percentage returns	Date	S&P Price	S&P 500 Percentage returns
Feb 01, 2017	51,63 лв.	3,1377%	Feb 01, 2017	2 363,64 лв.	-0,0389%
Mar 01, 2017	53,25 лв.	2,8545%	Mar 01, 2017	2 362,72 лв.	0,9091%
Mar 31, 2017	54,77 лв.	5,9156%	Mar 31, 2017	2 384,20 лв.	1,1576%
Apr 30, 2017	58,01 лв.	-7,9641%	Apr 30, 2017	2 411,80 лв.	0,4814%
May 31, 2017	53,39 лв.	-7,4171%	May 31, 2017	2 423,41 лв.	1,9349%
Jun 30, 2017	49,43 лв.	1,6185%	Jun 30, 2017	2 470,30 лв.	0,0546%
Jul 31, 2017	50,23 лв.	-1,6524%	Jul 31, 2017	2 471,65 лв.	1,9303%
Aug 31, 2017	49,40 лв.	2,1053%	Aug 31, 2017	2 519,36 лв.	2,2188%
Sep 30, 2017	50,44 лв.	5,4322%	Sep 30, 2017	2 575,26 лв.	2,8083%
Oct 31, 2017	53,18 лв.	-0,1504%	Oct 31, 2017	2 647,58 лв.	0,9832%
Dec 01, 2017	53,10 лв.	-1,0734%	Dec 01, 2017	2 673,61 лв.	5,6179%
Jan 01, 2018	52,53 лв.	0,5140%	Jan 01, 2018	2 823,81 лв.	-3,8947%
Feb 01, 2018	52,80 лв.	1,9318%	Feb 01, 2018	2 713,83 лв.	-2,6885%
Mar 01, 2018	53,82 лв.	-0,5574%	Mar 01, 2018	2 640,87 лв.	0,2719%
Mar 31, 2018	53,52 лв.	-1,5695%	Mar 31, 2018	2 648,05 лв.	2,1608%
Apr 30, 2018	52,68 лв.	-13,3447%	Apr 30, 2018	2 705,27 лв.	0,4842%
May 31, 2018	45,65 лв.	7,2508%	May 31, 2018	2 718,37 лв.	3,6022%
Jun 30, 2018	48,96 лв.	2,0221%	Jun 30, 2018	2 816,29 лв.	3,0263%
Jul 31, 2018	49,95 лв.	7,0871%	Jul 31, 2018	2 901,52 лв.	0,4294%
Aug 31, 2018	53,49 лв.	2,5051%	Aug 31, 2018	2 913,98 лв.	-6,9403%
Sep 30, 2018	54,83 лв.	14,5176%	Sep 30, 2018	2 711,74 лв.	1,7859%
Oct 31, 2018	62,79 лв.	-2,9623%	Oct 31, 2018	2 760,17 лв.	-9,1777%
Dec 01, 2018	60,93 лв.	5,8099%	Dec 01, 2018	2 506,85 лв.	7,8684%

PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2022, volume 61, book 6.5

Jan 01, 2019	64,47 лв.	3,1022%	Jan 01, 2019	2 704,10 лв.	2,9729%
Feb 01, 2019	66,47 лв.	6,3638%	Feb 01, 2019	2 784,49 лв.	1,7924%
Mar 01, 2019	70,70 лв.	4,4979%	Mar 01, 2019	2 834,40 лв.	3,9313%
Mar 31, 2019	73,88 лв.	-2,0845%	Mar 31, 2019	2 945,83 лв.	-6,5778%
Apr 30, 2019	72,34 лв.	10,7133%	Apr 30, 2019	2 752,06 лв.	6,8930%
May 31, 2019	80,09 лв.	12,9604%	May 31, 2019	2 941,76 лв.	1,3128%
Jun 30, 2019	90,47 лв.	1,9786%	Jun 30, 2019	2 980,38 лв.	-1,8092%
Jul 31, 2019	92,26 лв.	-8,0858%	Jul 31, 2019	2 926,46 лв.	1,7181%
Aug 31, 2019	84,80 лв.	-4,3632%	Aug 31, 2019	2 976,74 лв.	2,0432%
Sep 30, 2019	81,10 лв.	1,0234%	Sep 30, 2019	3 037,56 лв.	3,4047%
Oct 31, 2019	81,93 лв.	3,4298%	Oct 31, 2019	3 140,98 лв.	2,8590%
Dec 01, 2019	84,74 лв.	-3,5166%	Dec 01, 2019	3 230,78 лв.	-0,1628%
Jan 01, 2020	81,76 лв.	-7,5342%	Jan 01, 2020	3 225,52 лв.	-8,4110%
Feb 01, 2020	75,60 лв.	-15,7937%	Feb 01, 2020	2 954,22 лв.	-12,5119%
Mar 01, 2020	63,66 лв.	16,7138%	Mar 01, 2020	2 584,59 лв.	12,6844%
Mar 31, 2020	74,30 лв.	1,6420%	Mar 31, 2020	2 912,43 лв.	4,5282%
Apr 30, 2020	75,52 лв.	-5,1112%	Apr 30, 2020	3 044,31 лв.	1,8388%
May 31, 2020	71,66 лв.	4,0050%	May 31, 2020	3 100,29 лв.	5,5101%
Jun 30, 2020	74,53 лв.	10,3717%	Jun 30, 2020	3 271,12 лв.	7,0065%
Jul 31, 2020	82,26 лв.	2,2733%	Jul 31, 2020	3 500,31 лв.	-3,9228%
Aug 31, 2020	84,13 лв.	1,2005%	Aug 31, 2020	3 363,00 лв.	-2,7666%
Sep 30, 2020	85,14 лв.	12,7202%	Sep 30, 2020	3 269,96 лв.	10,7546%
Oct 31, 2020	95,97 лв.	9,6593%	Oct 31, 2020	3 621,63 лв.	3,7121%
Dec 01, 2020	105,24 лв.	-9,5021%	Dec 01, 2020	3 756,07 лв.	-1,1137%
Jan 01, 2021	95,24 лв.	11,5813%	Jan 01, 2021	3 714,24 лв.	2,6091%
Feb 01, 2021	106,27 лв.	1,5809%	Feb 01, 2021	3 811,15 лв.	4,2439%
Mar 01, 2021	107,95 лв.	4,7800%	Mar 01, 2021	3 972,89 лв.	5,2425%
Mar 31, 2021	113,11 лв.	-0,5305%	Mar 31, 2021	4 181,17 лв.	0,5487%
Apr 30, 2021	112,51 лв.	-1,4310%	Apr 30, 2021	4 204,11 лв.	2,2214%
May 31, 2021	110,90 лв.	8,6023%	May 31, 2021	4 297,50 лв.	2,2748%
Jun 30, 2021	120,44 лв.	-3,2464%	Jun 30, 2021	4 395,26 лв.	2,8990%
Jul 31, 2021	116,53 лв.	-5,7410%	Jul 31, 2021	4 522,68 лв.	-4,7569%
Aug 31, 2021	109,84 лв.	-3,8511%	Aug 31, 2021	4 307,54 лв.	6,9144%
Sep 30, 2021	105,61 лв.	3,3709%	Sep 30, 2021	4 605,38 лв.	-0,8334%
Oct 31, 2021	109,17 лв.	7,1448%	Oct 31, 2021	4 567,00 лв.	4,3613%
Dec 01, 2021	116,97 лв.	-15,9443%	Dec 01, 2021	4 766,18 лв.	-5,2585%
Jan 01, 2022	98,32 лв.		Jan 01, 2022	4 515,55 лв.	

Графики на получените резултати



Графика 1. Движението на цените в последните 5 години



Графика 2. Процентна норма на възвръщаемост за всеки месец

Бета коефициент (β) – измерител на пазарния риск

Бета коефициент на акции (β) представлява мярка на пазарния риск на акцията и е показател за това, в каква степен доходът ѝ се изменя едновременно с пазарните доходи. Фирмата може да въздейства на своя пазарен риск чрез изменение на структурата на финансовите си активи (чрез бета) или чрез използване на кредитно финансиране. Бета на предприятията се променя под влиянието на усилена конкуренция в отрасъла, остаряване на технологиите, забавяне на иновациите и т.н. Тези обстоятелства могат да доведат до намаляване на нормата на печалба и отгук да се повлияе върху цената на акциите на фирмата. Коефициентът бета е критерий, който количествено характеризира промените на дадена акция спрямо промените на средните (пазарни) акции.

Пазарният риск на акциите се определя с бета коефициент на портфейла. В зависимост от равнището му се прави следната класификация[4]:

Акция с висок бета коефициент – тя е по-малко устойчива отколкото средната акция, като устойчивостта е по отношение на нормата на възвръщаемост и цената на акцията.

Акция с нисък бета коефициент – тези акции по норма на възвръщаемост и цена са по-устойчиви, отколкото средно за акциите (пазарния портфейл).

Акция със среден бета коефициент – тя проявява тенденция към повишаване или намаляване едновременно с общата динамика на пазара.

Пазарният риск за акции, определен с бета коефициент, който показва относителната неустойчивост може да бъде характеризирани за конкретни компании така:

$\beta = 1,0$ за дадена акция означава, че нейната възвръщаемост е равна на тази на пазарния портфейл, т.е. акциите на дадена компания имат средна степен на риска както на целия пазар.

$\beta > 1$ например $\beta = 2$ – акцията има риск, който превишава два пъти средното равнище. Цената на такава акция средно ще нараства (намалжава) с 2% при съответна промяна на пазарната цена с 1%. Такава ценна книга е високорискова. Тя се нарича “агресивна инвестиция”.

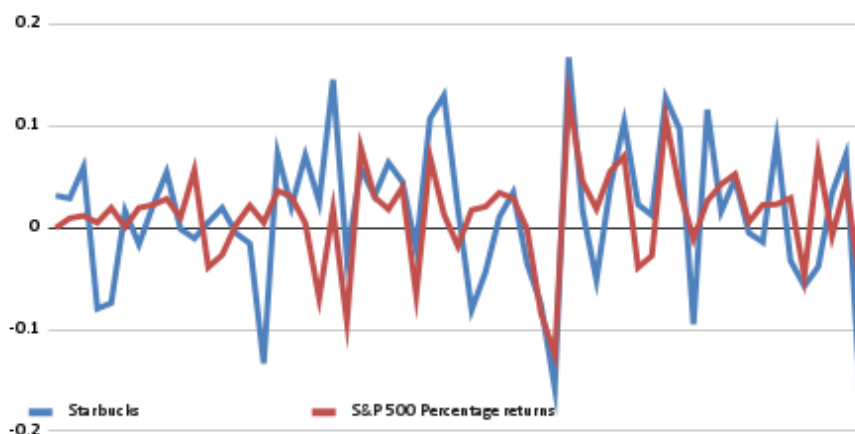
$\beta < 1$, например $\beta = 0,5$ – такава акция има по-малка чувствителност към пазарните промени. Тя е два пъти по-малко рискова отколкото средната. При $\beta = 0,5$ цената на такава акция нараства (намалжава) с 0,5% при съответна промяна на пазарната цена с 1%. Такива акции се наричат “защитни”.

Бета измерва не само пазарния риск, но и чувствителността на доходите на ценните книжа към пазарните промени. С бета се установяват очакваните промени в цените на акциите за всяка промяна на пазарната им цена с 1%. Бета коефициентът на акцията определя степента на нейното влияние върху равнището на диверсифицирания портфейл. Този коефициент е оптимална мярка за риск на всяка акция.

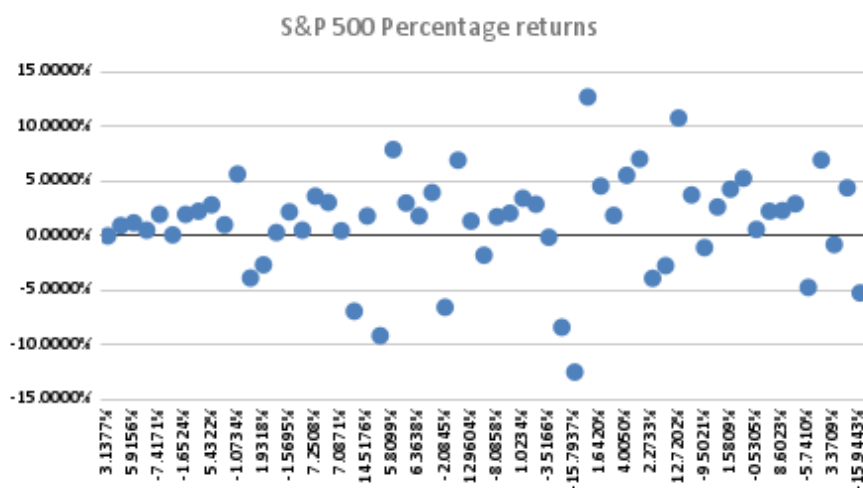
Бета коефициентът се пресмята, чрез следната формула:

$$\text{Beta} = \text{COVARIANCE.P}(\text{rm};\text{rsp})/\text{VAR.P}(\text{rm}) \quad (2)$$

Използвайки (2), получаваме $\beta = 0,37$. Тъй като коефициентът е по-малък от 1, такава акция има по-малка чувствителност към пазарните промени. Тя е два пъти по-малко рискова отколкото средната.



Нека да разгледаме отношението между акциите на Starbucks и индексът S&P 500:



Използвайки линейна регресия, намираме правата:

$$y = 0,3728x + 0.0071$$

Наклонът на тази права е равен на бета коефициентът. Нека да пресметнем месечната норма на възвръщаемост на индекса S&P 500.

Използваме:

$$E(R') = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}$$

Получаваме 0,75%. Умножавайки тази стойност с 12, ще получим 9%, което е очакваната норма на възвръщаемост на пазара.

Възвръщаемостта на пет годишни американски ДЦК, е 2,74%.

Използвайки (1), за очакваната норма на възвръщаемост за акциите на Starbucks спрямо индексът S&P 500, получаваме:

$$E(R_i) = 0,0274 + 0,3728(0,09 - 0,0274) = 0,050737 = 5,073\%$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статията се прави критичен преглед на приложението на Модела за оценка на капиталовите активи при оценяване на активи. Извеждат се някои проблеми и се предлагат решения. Разгледани бяха два бизнес казуса, свързани с определянето на изискуемата норма на възвръщаемост от страна на два типа инвеститори. При решаването им е застъпено мнението, че трябва да се отчита спецификата на възложителя, т.е. какъв тип инвеститор е той. При локален инвеститор, който оперира на пазар, който не е интегриран към глобалния финансов пазар и не е диверсифициран, то следва да се използва класическия Модел за оценка на капиталовите активи. В случай, че възложителят е чуждестранен инвеститор и е напълно или частично диверсифициран, то следва да се приложи Глобалния Модел за оценка на капиталовите активи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zukin, James, H., 1990. Financial Valuation: Businesses and Business Interests, WGL
- [2] Sharpe, William F., Guy M. Cooper. 1972. Risk- Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931-1967, Financial Analysts Journal, March-April, 1972, pp. 46-54.
- [3] Nenkov, D., 2012. Dynamics of capital markets and its impact on the cost of equity, Verslo ir teisės aktualijos / Current Issues of Business and Law, ISSN 1822-9530 print / ISSN 2029-574X online, 2012, p. 370.
- [4] Damodaran, Aswath, 2008. What is the riskfree rate? A search for the Basic Building Block, Stern School of Business, New York University.
- [5] <https://finance.yahoo.com/>
- [6] <https://www.starbucks.com/>
- [7] <https://www.investopedia.com/terms/m/marketriskpremium.asp>
- [8] <https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp>
- [9] https://www.youtube.com/watch?v=fv0_3wnw6h8

TRAINING 12TH GRADE STUDENTS FOR NATIONAL GRADUATION EXAM BY USING INFORMATION TECHNOLOGIES⁹

Bozhidar Atanasov – Student

Department of Informatics and Information technologies,
University of Ruse
Phone: 0876-647-771
E-mail: s216271@stud.uni-ruse.bg

Pr. Assist. Kamelia Shoilekova, PhD

Department of Informatics and Information technologies,
University of Ruse
Phone: 0887-859-224
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

Abstract: *The paper presents a way to prepare students in 12th grade for national matual exam using information technologies. It puts emphasis on the benefits of such a platform, the functionality and design decisions made during its creation and discusses further improvements to it.*

Keywords: *Testing, Node.js, Typescript, Firebase, API, React, Vercel, National graduation exam*

ВЪВЕДЕНИЕ

Съществуват множество системи, които предлагат различни тестове и изпитни материали за учениците от 12 клас, но към момента няма система, която да предлага аналог на държавния зрелостен изпит (ДЗИ). Учениците имат възможност да намерят от интернет пространството тестовете и вариантите от предходните години, да ги изтеглят и да започнат да ги попълват, но:

- времето, което е ключов фактор за успеха не се засича;
- необходимо е ръчно да се направи проверка на отговорите;
- възможно е допускане на грешки при определяне на верните отговори и пресмятане на точките;
- отговорите са на разположение и възможността човек да се изкуши и да ги погледне, също е ключов фактор за успеха на ученика;
- приключването по единия модул и започване работа по другия, в тази ситуация, не гарантира, че по време на решаването на въпросите от втория модул, учениците няма да се сетят за отговор на даден въпрос от Модул 1 и вероятността да го коригират е голяма.

Всичко това може да подведе учениците, че са достатъчно подготвени, което е една от най-съществените причини, която провокира идеята за създаване на подобна система. Приложението предлага на ученици да направят пробна матура от предходни години, която съдържа:

- всички компоненти на ДЗИ;
- таймер, които засича времето за работа;
- проверка на тестовия модул;
- показване на верните отговори и на предложените от ученика;
- провеждане на теста по тестови модули;
- точкова система, която показва броя точки, които ученикът е натрупал при решаването на избрания изпитен билет;

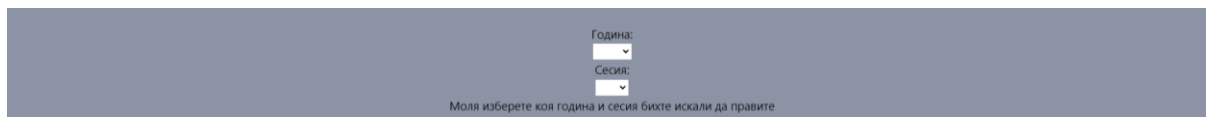
⁹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ПОДГОТОВКА НА УЧИНИЦИ ОТ 12 КЛАС ЗА ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ С ИЗПОЛЗВАНЕТО НА ИНФОРМАЦИОННИТЕ ТЕХНОЛОГИИ.

- автоматична и ръчна смяна на модулите.

Към настоящият момент системата е разработена само за ДЗИ по български език и литература, но в бъдеще могат да бъдат добавени всички останали предмети и дори други тестови формати.

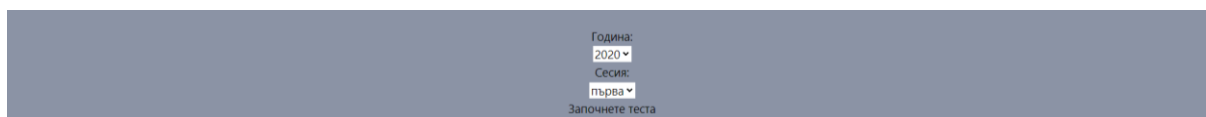
ИЗЛОЖЕНИЕ

Системата, помагаша на учениците от 12 клас да се подготвят за ДЗИ, е достъпна на следния адрес: <https://exam-helper-swart.vercel.app/>. След като стартирате линкът, ви се зарежда началната страница (фиг. 1), в която трябва да изберете годината и сесията. Изборът на година означава календарната година, в която е изтеглен този изпитен билет, а сесия – дали е първа сесия за ученика или втора (поправителна).



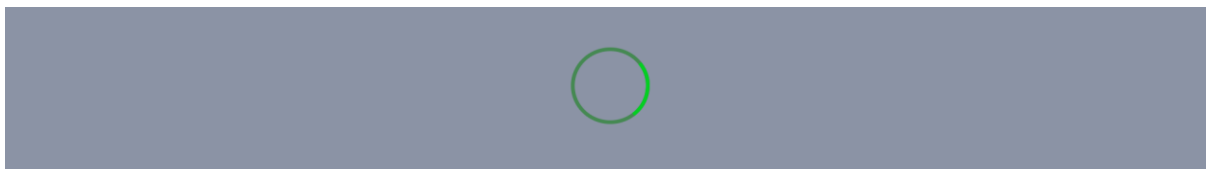
Фиг. 1. Начална страница

След като сте направили вашия избор по отношение на година и сесия (фиг. 2), системата ви дава възможност да стартирате теста.



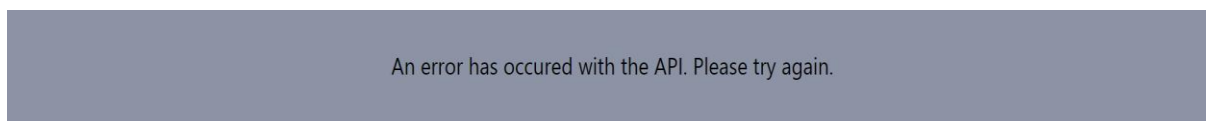
Фиг. 2. Избор на година и сесия

Поради факта, че приложението взема данните си от API в краткия интервал от време, докато те се доставят, има анимиран визуален елемент (фиг. 3), показващ на потребителя, че нещо се случва и трябва да бъде търпелив.



Фиг. 3. Потребителят е необходимо да изчака, за да се зареди информацията

Когато потребителя се опита да достъпи API, докато има технически проблем, на екрана ще се визуализира съобщение за грешка.



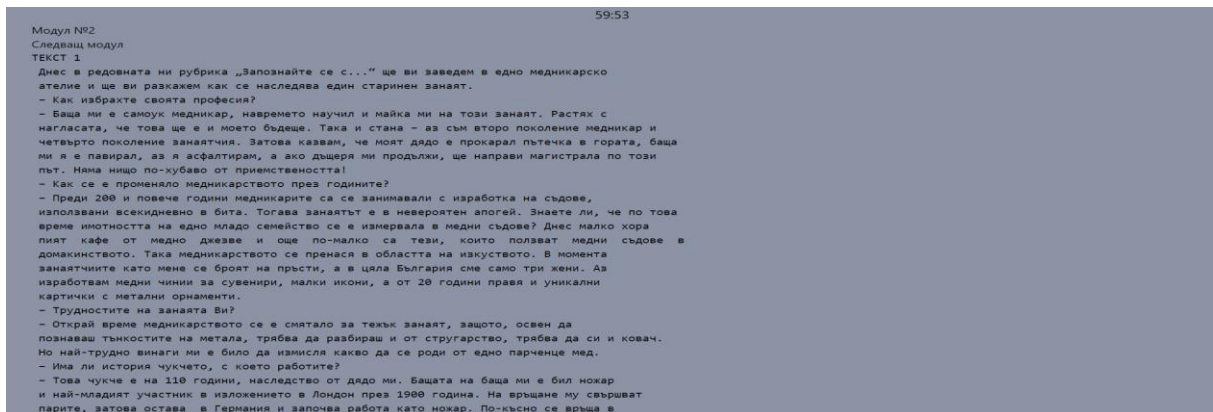
Фиг. 4. Технически проблем

При стартиране на теста винаги се зарежда Модул 1 (фиг. 5). За решаването на тази част са необходими 60 минути. Системата разполага с таймер, който показва оставащото време на изпитваните ученици.

След като времето изтече, системата автоматично затваря този модул и стартира Модул 2. Ако ученикът, успее да реши въпросите за по-кратък интервал от време, той има възможност ръчно да премине на следващия модул. Времето необходимо за решаване на Модул 2 отново е 60 минути (фиг. 6).



Фиг. 5. Модул 1



Фиг. 6. Модул 2

Тъй като не се използва предварително направена библиотека за формите на въпросите, всеки един въпрос трябва да бъде анализиран и да бъде поставен в собствена категория (фиг. 7). След като са създадени определените категории, е направен дизайн на API, който съдържа данните. Чрез помощта на JS и HTML form елементи са създадени преизползваеми модули за всеки въпрос, на които само трябва да бъдат подадени данни. При възможност се подава и верния отговор, от където следва, че системата ще провери отговора на въпроса и ще обнови точките на ученика.



Фиг. 7. Различни категории въпроси

Трети модул

В третия модул ученикът трябва да напише аргументативен текст на тема в жанр интерпретативно съчинение или есе, което се пише в голямото празно поле. Поради факта, че не е представен верен отговор, е необходимо учител да провери този въпрос. След приключване работа по варианта е предоставена възможност, отговорът да бъде свален като текстови файл и след това ученикът да се свърже с учител за проверка.



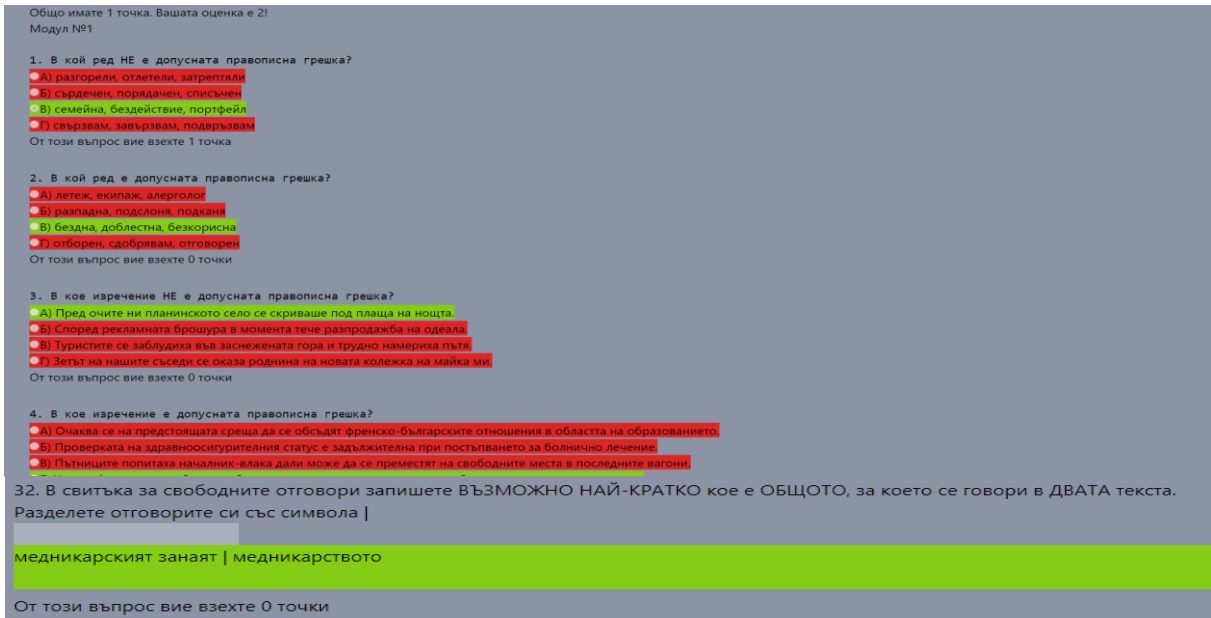
Фиг. 8. Модул 3

Проверяване след предаване

При проверка на резултата от проведения изпит в:

- зелено се оцветяват всички верни отговори съгласно ключа с отговорите;
- с червено се оцветяват всички грешни отговори.
- при въпроси със свободен отговор със зелен фон са посочени верните отговори.

След всеки въпрос системата ви показва колко точки сте получили.



Фиг. 9. Проверка на резултата

Използвани технологии: node, npm, react, typescript, firebase, vercel.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Този проект е създаден, тъй като подобно приложение, което има за цел да помага на учениците от 12 клас да се подготвят за ДЗИ още не съществува.

В бъдеще ще се опита да добавим още функционалности и обяснения на верните отговори, да се добавят данни от следващи години и други учебни предмети.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] <https://felixgerschau.com/react-performance-react-memo/>
- [2] <https://stackoverflow.com/questions/67061088>
- [3] <https://reactjs.org/docs/conditional-rendering.html>
- [4] <https://www.npmjs.com/package/react-countdown>
- [7] <https://github.com/mhnpd/react-loader-spinner>
- [8] <https://firebase.google.com/docs/firestore/query-data/get-data>

GAME AND WEBSITE DESIGN AND DEVELOPMENT¹⁰

Serkan Sadulov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 87 892 5635
E-mail: Serkansadulov@gmail.com

Mustafa Mustafov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 89 056 9310
E-mail: MustafaSunayev607@gmail.com

Pr. Assist. Kamelia Shoilekova, PhD

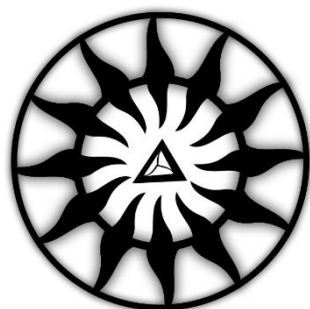
Department of Informatics and Information technologies,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 88 785 9224
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

Abstract: The paper reviews the process of developing a game, supported by a web-site, which is used for marketing the product. In the report is shown the methods and the practices that are used for developing the softwear and the web-site, there will be examples of code and assets used in the development procces. This paper shows the creation of genuine softwear. There will be explanation behind the thought procces of making the game and the web-site, along with presentation, showing the products.

Keywords: Game, Web-site, Engine.

ВЪВЕДЕНИЕ

В наши дни съществуват множество компютърни игри, които са с различна тематика, жанр, ниво на възприятие и др. Екипът, които разработва тази игра обича времето пред компютъра, независимо от факта дали ще играе игри или ще пише код. Играта, която е създадена е начерена “The Meaning” (фиг. 1). Тя представя живота на протагониста Ийтан Дениълс, който губи семейството си при тежка катастрофа. Всичко това подсказва, че играчите трябва да са в постоянна готовност, че нещо ще се случи. Моментите на напрежение в играта също не са малко на брой. Но каква ще е развръзката на историята, ще се разбере в края.



The Meaning



Отборът MSSK Studio

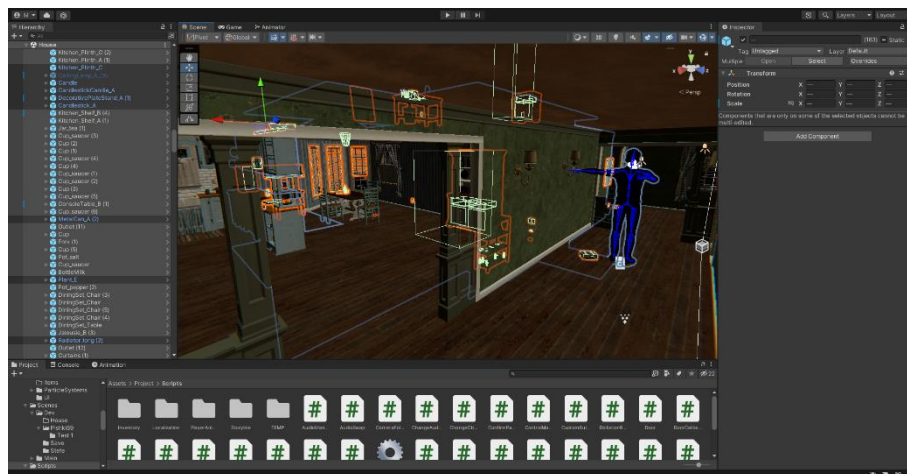
Фиг. 1. Лого на играта и отбора

¹⁰ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: РАЗРАБОТКА И ДИЗАЙН НА ВИДЕО ИГРА И САЙТ.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Основи на играта

Играта е реализирана благодарение на базата на “Unity”, създаден от Unity Technologies, който е пуснат за първи път през юни 2005 година на световната конференция на разработчиците на Apple Inc. като ексклузивна игрова основа за Mac OS X. По-късно се разширява и започва да поддържа по-голямата част от платформите. С годините излизат много различни и по-добри версии. Основата на играта и голяма част от функционалностите ѝ са базирани на програмния език C#, а начинът на изобразяване - на DirectX 12 (фиг. 2).



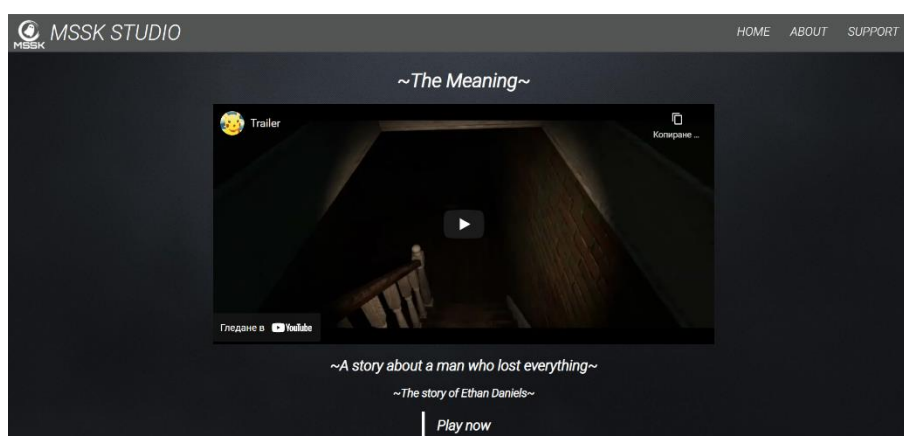
Фиг. 2. Конструирание на картата на играта и свързване на логиката

Сайт на играта

При разработването на сайта на играта са използвани следните програмни продукти и инструменти:

- HTML - за изграждането на скелета на сайта;
- CSS - за оформлението и графиката;
- JavaScript и JQuery – за реализация на част от функционалностите;
- Photoshop - логото на сайта и останалите графични обекти.

В сайта е представен трейлърът на играта, кратка информация за нейните автори, както и мястото, откъдето може да се свали (фиг. 3).



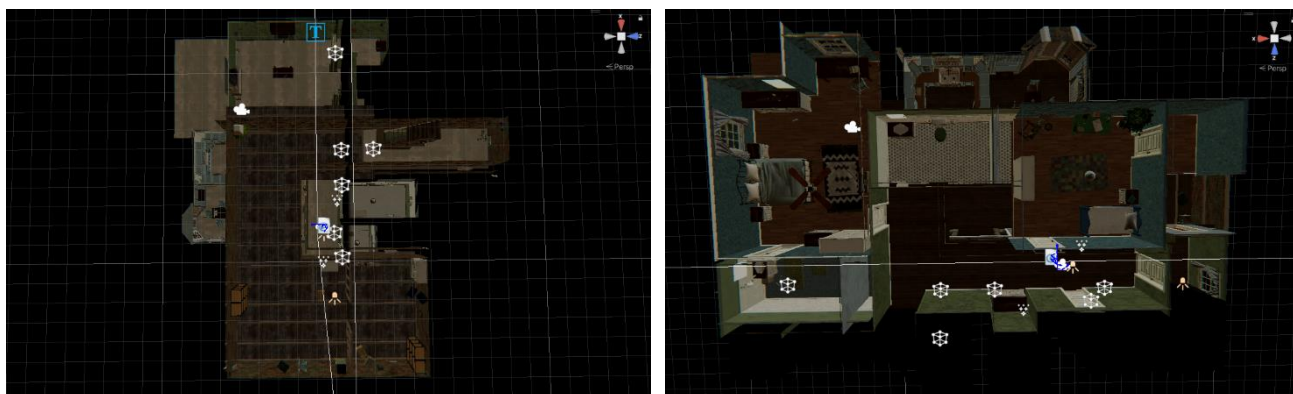
Фиг. 3. Сайта на играта

Сайтът е създаден с маркетингова цел за нейното представяне.

Картата на играта

За картата на играта е използвана архитектурата на традиционна американска къща. Тя има само интериор без екстериор, защото целият сюжет се развива на територията на къщата, която се състои от два етажа и мазе. На първия етаж има кухня, всекидневна, баня и

още няколко малки помещения. На вторият етаж са разположени две спални и няколко малки стаи (фиг. 4). Моделите за изграждането на картата са закупени от Unity Asset Store и след това са аранжирани от екипа разработчик.



Фиг. 4. Карта на играта

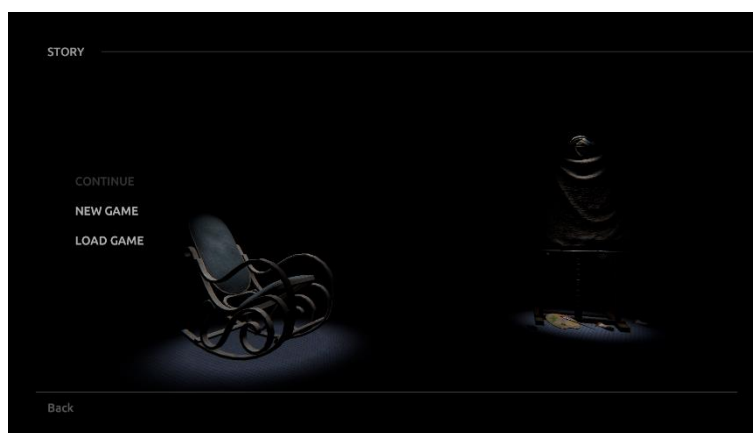
Меню

Менюто на играта е направено в тематиката на играта - съдържа няколко опции, които са подредени в лявата част на екрана (фиг. 5).



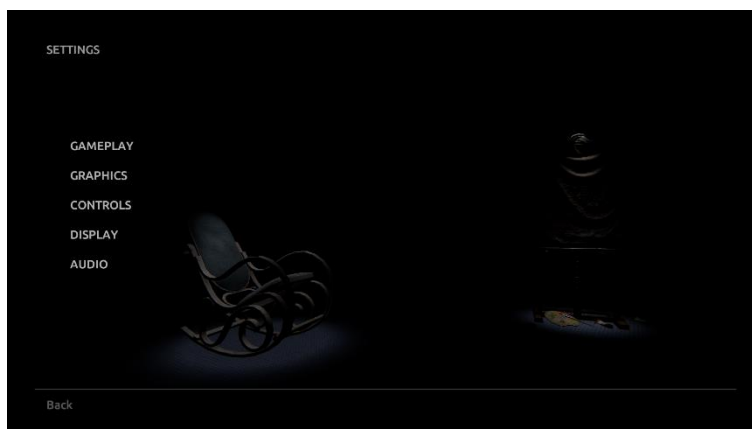
Фиг. 5. Меню на играта

- Едната от опциите е играй, която е съставена от няколко подменюта, за стартиране на нова игра или за започване от там до където е стигнал играча (фиг. 6).



Фиг. 6. Опция Играй

- В главното меню има опция настройки, където отново има подменюта за контролиране на графичните настройки, които включват смяна на резолюцията, смяна на качеството на текстурите и моделите, промяна нивото на звука, контролите, с които можем да управляваме играча (фиг. 7).

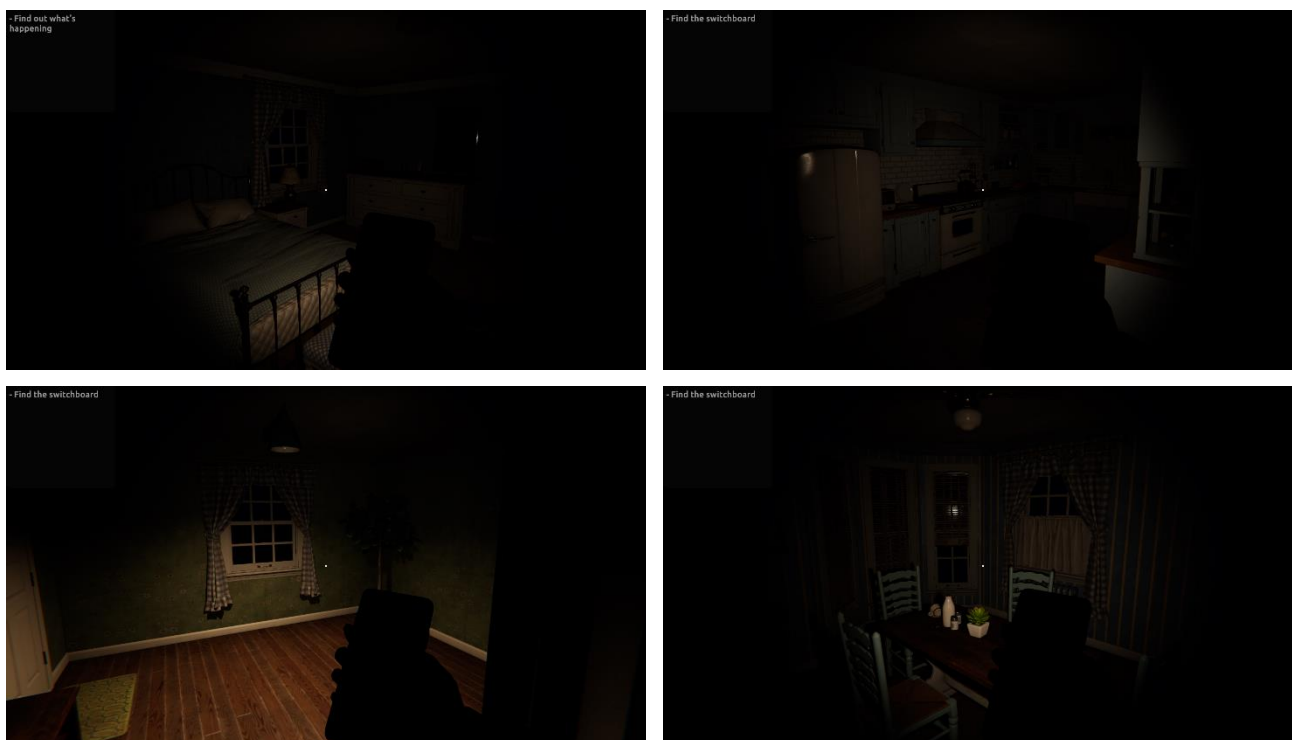


Фиг. 7. Опция Настройки

- Последният бутон в главното меню е бутон за изход от играта.

Поглед над играта

Играта е направена с множество модели, които са създадени, проектирани, представени и подредени така, че да засилят атмосферата на играта и да потопят играча изцяло в нейната същност. Използваните модели са тъмни и мрачни, но в същия момент има лека светлина, която се отблясва от моделите в къщата и загатва следващото препядствие, през което трябва да премине главния герой (фиг. 8).



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За създаването на играта са използвани знания и умения, които са натрупани и развити както като екип, така и като индивидуални играчи. Надяваме се, че това да е началото на съвместната ни работа за бъдещи проекти. Играта вече е качена на платформа за продажби на игри (Стийм), където се очакват и първите клиенти.

В бъдеще се планува да се създадат истории на още няколко героя. Като всеки герой ще има своя лична история и цел. Целта е да се достигне до ниво, в което играта ще може да се играе от няколко играча едновременно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] <https://jquery.com/>
- [2] <https://api.jquery.com/>
- [3] <https://html.com/>
- [4] <https://unity.com/>
- [5] <https://docs.unity3d.com/ScriptReference/>
- [6] <https://devdocs.io/css/>

METHODOLOGY & TECHNIQUES USED IN THE DEVELOPMENT OF ONLINE ORDER SYSTEM ¹¹

Pavel Angelov, Bachelor in Software engineering

Department of Informatics & Information technology,

University of Ruse

Tel.: +359 89 644 9551

E-mail: pavelang9@gmail.com

Prof. Tzvetomir Vassilev, PhD

Department of Informatics & Information technology,

University of Ruse

Phone: +359 82 88 84 75

E-mail: tvassilev@uni-ruse.bg

Abstract: This paper covers the basic elements of an online ordering system, describes and reviews its development stages. This paper also describes the core techniques used in the development stages of such library and all additional libraries required for the completion of the target functionality. It covers all aspects and requirements of a traditional ordering system as well existing solutions and their applications in the industry. The paper's main target is to explain and lay down the basics of a traditional order webapp. The author of this project was motivated by the potential acquisition of knowledge and experience in this field and also the chance of developing a webapp for orders.

Keywords: React, WebApp, Next.js, database, MongoDB, framework.

ВЪВЕДЕНИЕ

Статията има за цел да опише етапите на изграждане на уеб приложение, в което могат да се обслужват поръчки на клиенти. Ще бъдат описани етапите на front end development (частта, която е видима за крайния потребител) и back end development (функционалността на приложението) или още познати заедно като full stack.

Програмните езици и технологии, които са използвани за front end са Javascript, React Next.js и CSS. За back end – Javascript React Next.js, MongoDB за база данни, React Redux и Next.js Paypal (за да може да се използва плащане чрез paypal).

Произход и предназначение – Next.js е open-source web development framework изградена върху Node.js (също framework), позволяваща на базирани на React приложения, като изобразяване от страна на и генериране на статични уебсайтове.

React – JavaScript библиотека, която обикновено се използва за създаване на уеб приложения.

MongoDB – Система за обработване на бази данни от документи. Тя е от рода на нерелационните бази данни (NoSQL). Вместо да съхранява информация в таблици, както е при традиционните релационни бази данни, MongoDB съхранява структурираната информация в JSON формат с динамични схеми. Това прави интегрирането на информацията в определени приложения доста по-лесно и по-бързо.

Структура – Next.js е много безразличен относно това как да структурирате своя проект.

¹¹Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНИКИ, ИЗПОЛЗВАНИ ПРИ РАЗРАБОТВАНЕТО НА СИСТЕМАТА ЗА ОНЛАЙН ПОРЪЧКИ“.

Единственото нещо, за което наистина трябва да се внимава, е да няма нищо под страници, които не са действителни страници (например: тестове, компоненти и т.н.), защото няма начин да ги игнорирате и Next ще ги обедини и разположи като действителни страници.

Обичайно разположение на папки е показано на фиг. 1.

```

/public
  favicon.ico
/src
  /components
    /elements
      /auth
        AuthForm.tsx
        AuthForm.test.ts
      /[Name]
        [Name].tsx
        [Name].test.ts
    /hooks
    /types
    /utils
    /test
  /api
    authAPI.test.js
    [name]API.test.js
  /pages
    index.test.js

/pages
  /api
    /authAPI
      authAPI.js
    /[name]API
      [name]API.js
  _app.tsx
  _document.tsx
  index.tsx

```

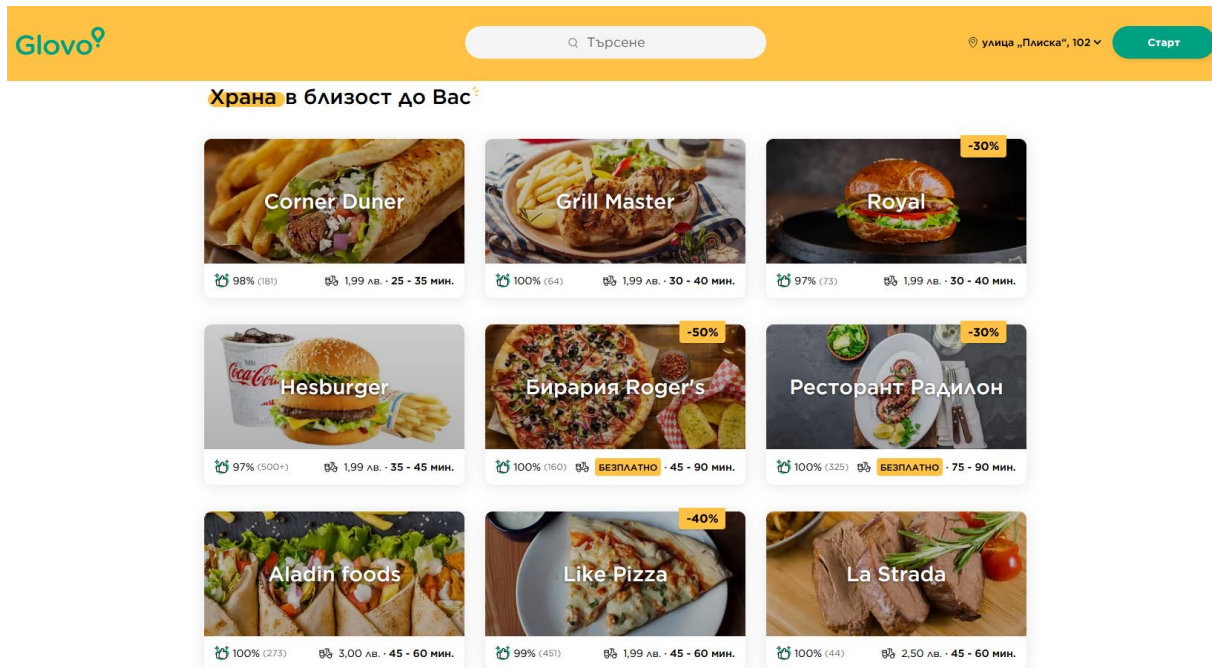
Фиг.1. Обичайно разположение на папки в Next.js

СЪЩЕСТВУВАЩИ РЕШЕНИЯ

Към днешен ден съществуват голям набор от такива системи. Използват се навсякъде, най-често се срещат при бързото хранене и ресторанти, но също така се използват и за доставка на мебели, дрехи и много други работи.

- **Glovoapp**

Glovo е уеб базирано приложение, като може и да се изтегли и като десктоп приложение или на телефона. В него си въвеждаш адреса и можеш да разгледаш какво можеш да си поръчаш наоколо. Работи с доставка на хранителни стоки, магазини, аптеки и ресторанти.



На фигурата е показано, как при въвеждане на адрес Русе, улица Плиска излизат околните ресторанти в града и можеш да влезеш, да разгледаш и да си избереш. Показано е също какво време горе-долу ще се изчака, за да бъде доставена храната. Също всяка верига магазини и ресторанти си имат различна цена за доставка, което е показана също. Имат и рейтинг система, където всеки клиент може да оцени обслужването и даденото заведение.

Предимства:

Има възможност по всяко едно време на денонощието да се направи поръчка (зависи от града);

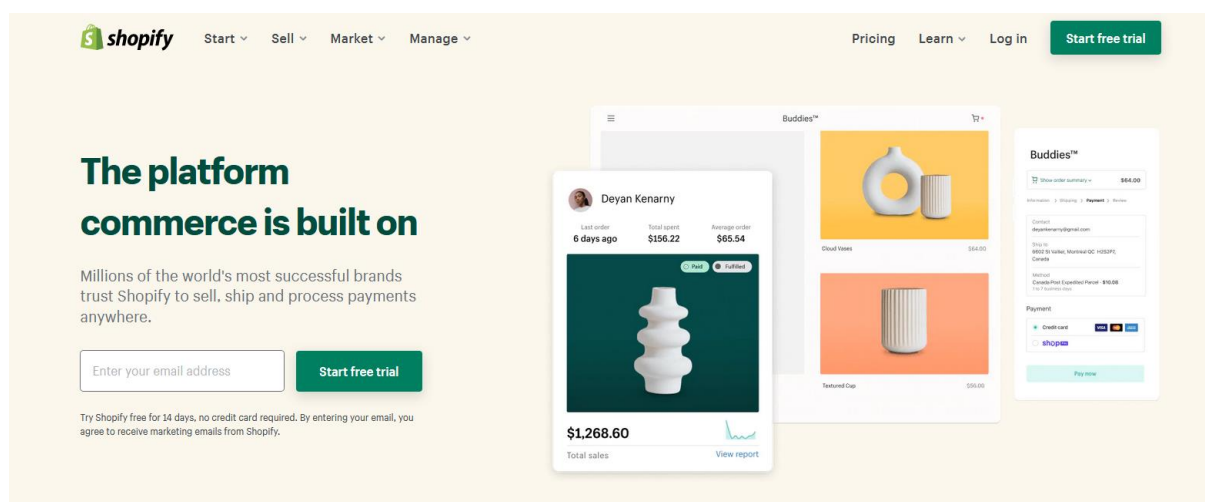
Клиентът може да избира между голямо разнообразие от оферти.

Недостатъци:

Не винаги се отговаря на очакваното време за доставка;

- **shopify.com**

Това е уеб базирана e-commerce софтуерна система. В нея всеки може да си направи акаунт и да продава или да купува продукти.



Предимства:

Позволява да се регистрират както фирми, така и физически лица.
Потребителят може да си направи директно онлайн магазин в приложението.
Има онлайн уроци за маркетинг, стратегии и други.

Недостатъци:

Само първите 14 дена е безплатно;
Трудно се работи, ако потребителят няма толкова висока компютърна грамотност.
Използван е шаблон за дизайн, който е неудобен и информацията е прекалено сбита.

• Dominos.bg

Това е уеб базирана система, предназначена за фирмата Доминос, които управляват собствена верига ресторанти за бързо хранене.

Предимства:

Системата е с добри функционални възможности.
В системата е вграден tracker, за да знае потребителя в каква фаза е поръчката му.



Недостатъци:

Задължителна регистрация.
Предлага обслужване само в дадени райони в градовете, в които работят.

АНАЛИЗ НА РАЗГЛЕДАНИТЕ СИСТЕМИ.

Сравнение на функционалните възможности на разгледаните системи е показано в Таблица 1.

Таблица 1. Сравнителна таблица

	glovo	shopify	dominos
Уеб базирана	ДА	ДА	ДА
Позволява регистрация на физически лица	ДА	ДА	ДА
Удобрен потребителски интерфейс	ДА	НЕ	ДА

ИЗВОДИ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Изводи

От направения преглед на съществуващите решения, се виждат следните недостатъци:

- Не всички приложения могат да се използват без регистрация;
- Куриерските услуги са ограничени;
- Не всички приложения са безплатни за използване;
- Почти всички системи налагат ограничения при регистрация на потребители (само фирми).

ПРОЕКТИРАНЕ НА СИСТЕМА ЗА ОБСЛУЖВАНЕ НА ПОРЪЧКИ

Цел и задачи – целта на настоящата работа е да се разработи online order system с цел обслужване на поръчки на малка фирма. Друга основна цел на разработката е запознаване със съвременни техники за създаване онлайн системи.

Могат да се използват 4 варианта за проектиране на такъв сайт :

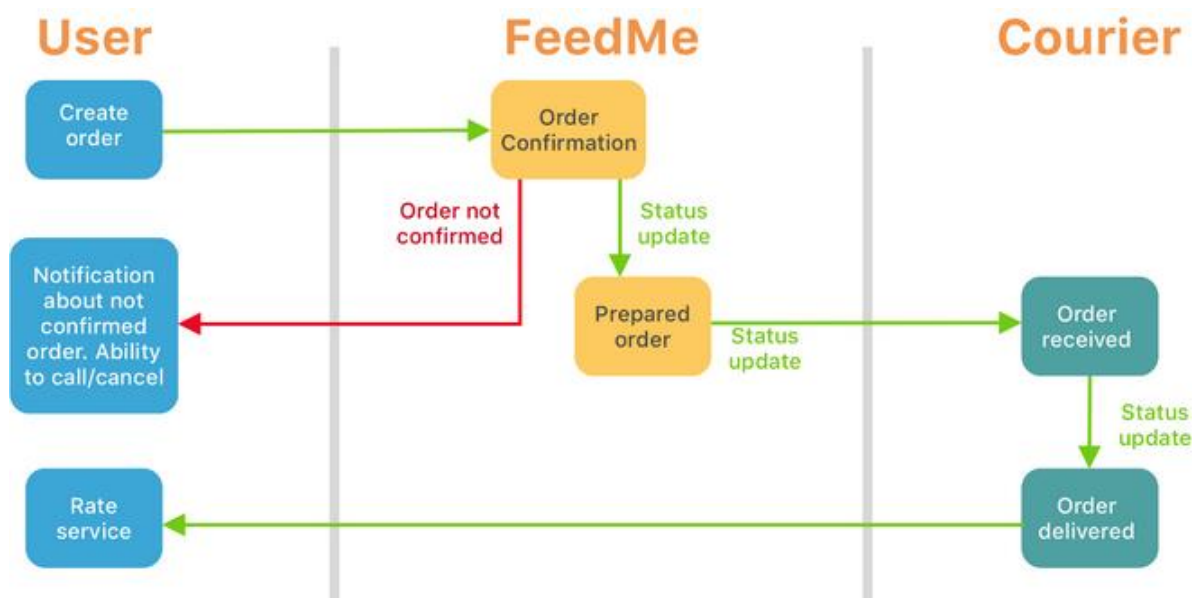
- Да си направиш сам от нулата такъв сайт с помощта на компютърни езици и технологии.
- Да изградиш уебсайт с помощта на някакъв website builder или WordPress
- Да използваш third party online ordering app, като Uber Eats
- Да използваш third party online ordering app комбиниран с POS система, като CAKE

За да се постигне поставената цел трябва да се решат следните задачи (поне 4):

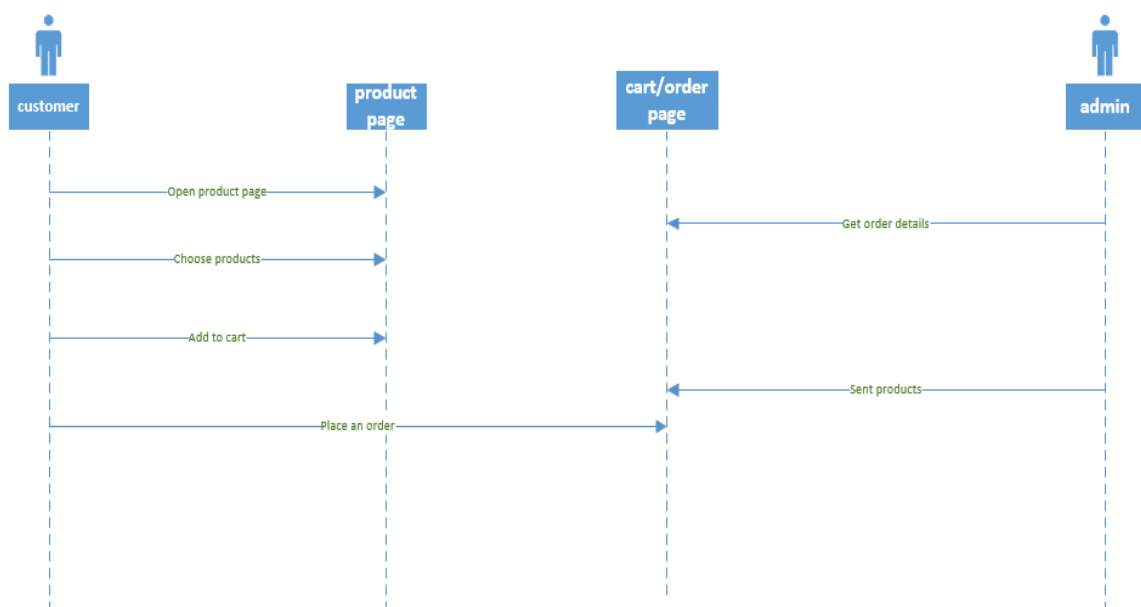
- Създаване на приложение, което да е платформено независимо;
- Потребителят с административни права да може да управлява продуктите и поръчките;
- Създаване на модул, с помощта на който клиентите да могат да създават поръчка и да следят състоянието;
- Изграждане на удобен потребителски интерфейс;

Проектиране

- Създаваме React Next.js приложение
- Създаваме back end (дизайн на сайта)
- Свързваме го с база данни, в която ще бъдат записвани информацията за продуктите и поръчките, и ако човека, на когото ще му послужи тази система, иска още нещо, като например база данни за клиенти, купувачи, etc...
- Правим функционалността на сайта, да могат да се вкарват продукти, да може да се поръчва, да има тракинг система, да може да се регистрира потребител и други.
- Създава се админ dashboard откъдето да могат да се контролира и поддържа до някаква част сайта от собственика.



Фиг. 3. Примерна диаграма на система за обслужване на поръчки на фирма за бързо хранене



Фиг. 4. Диаграма на последователностите на създаване на нова поръчка на дипломния проект

ИЗВОДИ

Създаването на онлайн система за обслужване на поръчки е задача, която може да се реализира в рамките на няколко месеца от сам човек или група хора. Може да се реализира и много по бързо ако се изгражда от нулата, а се използват готови шаблони и дизайни като в wordpress или shopify.

Всички бизнеси в днешно време, които се занимават с някаква продажба, разполагат с такива софтуери, защото в сегашни дни, особено и по време на пандемия, всичко се поръчва онлайн.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Node.js, MongoDB, React, React Native Full-Stack Fundamentals and Beyond Paperback
- [2] <https://www.jotform.com/blog/how-to-make-a-website-with-online-ordering/>
- [3] <https://www.websitebuilderexpert.com/building-online-stores/set-up-online-ordering-system/>
- [4] Real-World Next.js by Michaele Riva
- [5] MongoDB Fundamentals: A hands-on guide to using MongoDB and Atlas in the real world
- [6] <https://www.grubstreet.com/2017/11/app-truthers-claim-dominos-lies-about-who-makes-their-pizza.html>
- [7] <https://uxdesign.cc/ui-ux-case-study-feedme-mobile-app-for-ordering-food-ef0e7f8c82ba>

WEB BASED MULTIMEDIA SYSTEM FOR INFORMATIONAL AND COMMERCIAL USE IN WIDE VARIETY OF ORGANISATIONS ¹²

Martin S. Dzhurov – Student

Department of Technical and Natural Sciences,
University of Rousse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 89 39 75 107
E-mail: mdzhurov@uni-ruse.bg

Boyana Nedkova Ivanova, PhD

Department of Technical and Natural Sciences,
University of Rousse “Angel Kanchev”
Phone: +359 89 45 39 551
E-mail: bivanova@uni-ruse.bg

Abstract: *This article argues the use of web-based multimedia system for distributing information and commercials in a wide variety of organizations, emphasizing the benefits it brings through its applications for the organization's users. The paper describes a new kind of software, that will replace the existing one in the University of Rousse "Angel Kanchev", and also expose a comparison between the current and new one, as well as its benefits for the administration personnel.*

Key words: *Web application, Information distribution, New technologies, University, Students.*

REFERENCES

- [1] WizzyCast by Avant-X Technology. URL: <https://www.wizzycast.com/>
- [2] MyWizzyCast by Avant-X Technology – Administrative panel. URL: <https://mywizzycast.com/>
- [3] WikipediA – Adobe Flash. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Adobe_Flash
- [4] Raspberry PI – Official website. URL: <https://www.raspberrypi.com/software/operating-systems/>
- [5] Robotev – Official Raspberry PI related technologies import for Bulgaria. URL: https://www.robotev.com/index.php?cPath=1_48&osCsid=bt84o7ob77a97l09g0goosads7

¹² This Report is presented on a Student Scientific Session on 20 May 2022 in “Pedagogy and Psychology” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper“ Cristal Prize’22, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).

FRI-1.405A-SSS-I-05

CLOUD-BASED INTEGRATED DEVELOPMENT ENVIRONMENTS¹³

Vladislav Nikolov, student Software engineering

Department of Informatics and information technology,

University of Ruse

Tel.: +359882708232

E-mail: s206253@stud.uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Valentina Voinohovska, DSc

Department of Informatics and information technology,

University of Ruse

Phone: +359882417830

E-mail: vvoinohovska@uni-ruse.bg

Abstract: *The paper presents and analyses several existing online integrated development environments (IDEs), in particular Cloud 9 and GitHub Codespaces, and their benefits for online education and incontact one. Explaining why Cloud IDEs are practical and efficient in the meaning of time and computing power consumption, means that more people will struggle less in technical difficulties and waiting, but have time for problem related tasks.*

Keywords: *Online, Integrated Development Environment, Developing, Efficiency, Cloud.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Съвременния динамичен свят променя начина на живот, принуждавайки крайните потребители и корпоративните организации да настройват гъвкаво работните процеси и взаимодействие помежду си. Всичко това налага нови различни изискваният към ИТ средата, необходима за ефективното решаване на различни задачи.

През последните няколко години хората прекарваме немалко време онлайн – за работа и/или с учебни цели. Разбира се, този факт не би трябвало да притесни професионални направления, които са основно свързани с използване на компютърна техника или подобни дейности, които не изискват физическо присъствие.

Когато дадено лице за първи път встъпи в позицията да извършва дейности, пряко свързани с трета страна в учебна институция, в частност университет, или компания, на него често му се налага да започне от начало и да срещне редица проблеми, като например преконфигуриране на устройствата си. Това води до загуба на ресурси и за двете страни. За университета например, ако студентите искат да работят по проект, зададен от преподавателя в свободното си време, трябва да настроят допълнително устройството си, което изисква необходимото време преди изпълнение на съществената дейност. При завършване на работата по конкретно задание е необходимо то да бъде изпратено до преподавателя. Конкретни проблеми като определени разлики в системната среда могат да затруднят и да възпрепятстват постигането на крайния резултат.

Облачните среди за разработка могат да помогнат в тези, както и в други “неудобни” ситуации. Някои от основните им характеристики са хомогенност на средите между отделните потребители, готови конфигурирани решения и много други функции, които спестяват време на освен на крайния потребител-разработчик и всички останали ползватели.

¹³ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ОБЛАЧНО БАЗИРАНА ИНТЕГРИРАНА СРЕДА ЗА РАЗРАБОТКА.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Интегрирана среда за разработка

Преди време, за да започнем да разработваме софтуер са ни трябвали няколко различни програми, от различен характер. Това е било с цел пълнота на решението и проверка и тестове на изпълнението на програмата. Не след дълго всеки програмист можел да добавя тези отделни програми към своя редактор - най-често Vim или Emacs по онова време. Това създава удобство поради това, че програмиста сам си създава средата.

След време били създадени интегрираните среди за разработка. Това са редактори, комплектувани с най-важните решения, които биха потрябвали на един програмист. Това спестява време за конфигуриране на средата и обучение, тъй като почти всяко едно IDE (Integrated Development Environment - Интегрирана среда за разработка) има еднакъв набор от инструменти. Тъй като кодът се пише директно в средата, не е нужно да се сменят различни приложения. Всичко може да бъде извършено от средата. Най-често срещаните инструменти, които виждаме в повечето съвременни IDE-та са - автоматичното довършване кода, класова йерархия, подсветка на лексеми част от даден език, променливи и други, създадени с цел пестене на човеко-време в работния процес.

Облачни интегрирани среди за разработка

Облачните интегрирани среди за разработка представляват контейнеризирани среди, които се изпълняват в облака. Това че са контейнеризирани означава, че всяка инстанция на средата е “сама” за себе си.^[1] Тези среди предлагат някои плюсове пред стандартните среди. Една от тях е това, че не е нужно да се инсталира никакъв софтуер или да конфигурираме локалната си среда, така че разработчика може да започне веднага да допринася в разработването на софтуер. Използвайки този тип решение, се избягват проблеми от типа “Работи на моята машина, защо не работи на твоята”, които се разрешават от това, че средата е стандартизирана до някаква висока степен. Въздействието върху компютърният хардуер също е различно. Процесите по тестване и конструирането на крайния продукт е ресурсоемко и им е нужно време, което може да принуди програмиста да преустанови работата си. Облачната среда с лекота би продължила процеса другаде, като дава възможност на разработчика да продължи работата си без прекъсване.

Популярни облачни интегрирани среди за разработка

Най-популярното решение доста дълго време е това на Amazon, което закупуват средата на 2016 година, а именно - AWS¹⁴ Cloud9 [2]. Проектът започва като облачна среда за разработка с отворен код, в която влизат терминал, с масовите UNIX команди, `npm` и други решения. Основно средата поддържа “подчертаване”¹⁵ на езици като C#, C/C++, Java, JavaScript, Python и Ruby. Платформата притежава интеграция за Mercurial и Git, в този смисъл GitHub и Bitbucket [4].

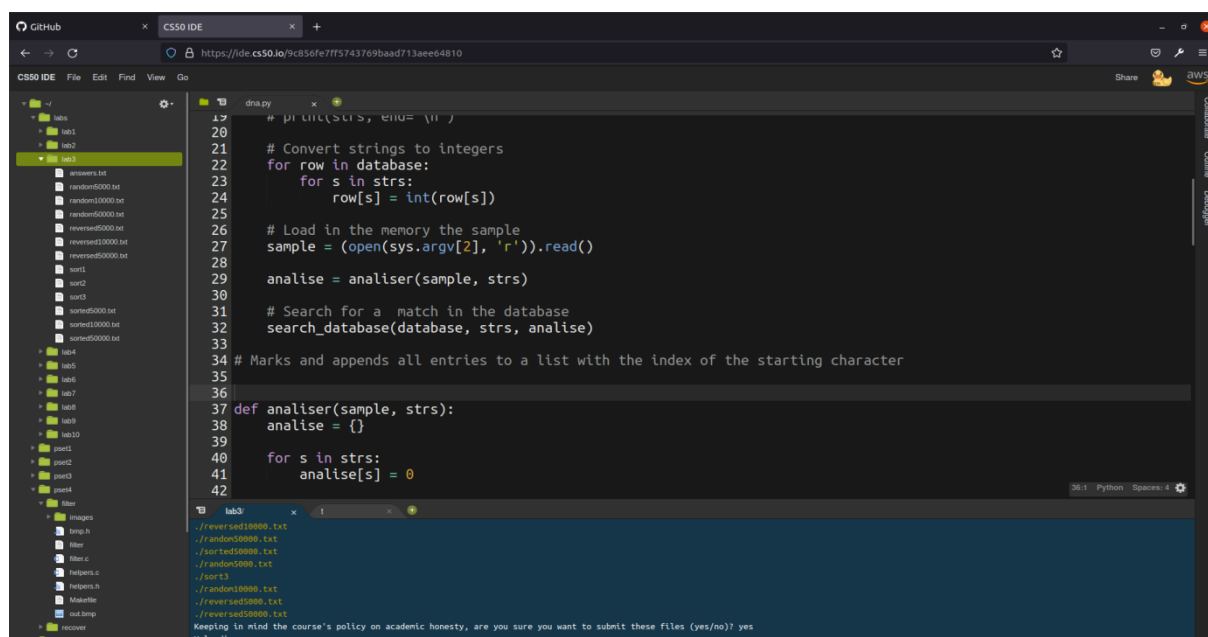
GitHub Codespaces е решение възникнало преди около година. Вградената интеграция с GitHub и в допълнение с Visual Studio Code for the Web, прави средата почти неразличима от десктоп изживяването с редактора VS Code. Както десктоп версията разполага с добавки от всякакъв характер, така и браузър версията разполага с тях, което допълва функционалните възможности на средата. [4]

Общото между двете е операции като компилиране и дебъгване да се изпълняват в браузъра, като позволяват на разработчика да работи в браузъра, точно както на собствената си изчислителна машина. Предоставяйки висока компютърна мощ, представена зад проста и лека връзка с крайния потребител прави “Вашия код достъпен навсякъде, по всяко време”¹⁶.

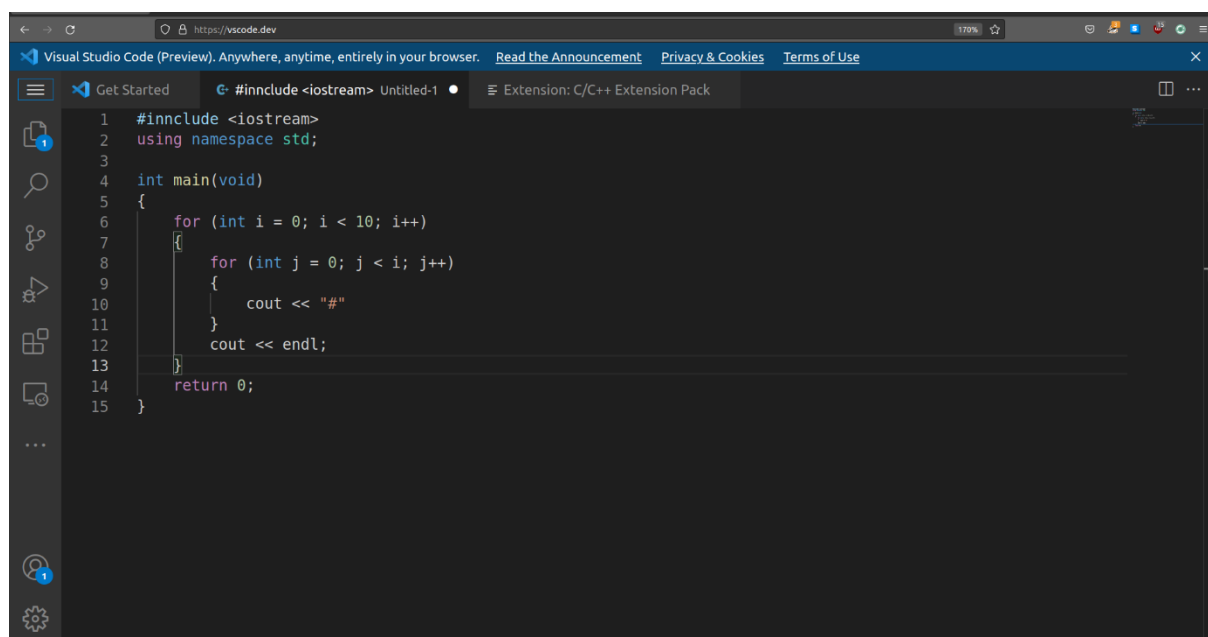
¹⁴ Amazon Web Services

¹⁵ Показването на някои лексеми оцветени по различен начин

¹⁶ Девиз на Cloud9



Фиг. 1. Cloud 9 базирана OCP (Харвард)



Фиг. 2. VSCode For The Web

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От личния опит на автора, като използвал такава среда за разработка за няколко месеца, може да се каже, че спестява не малко проблеми на начинаещи програмисти – без необходимия опит с компютърни системи и без умения за разрешаване на проблеми от технически характер. Средата дава възможност за преглед и редактиране на всичко, в частност код, от всяка точка на света, като единственото изискване е наличие на браузър.

В университетска среда на студентите от специалностите, включващи програмиране, се налага да изпращат на преподавателя задачи и проекти, които съдържат код. Това често става чрез архивиране на решението, отваряне и изпращане посредством имейл клиент. От друга страна облачните среди за разработки предлагат интегрирани решения, даващи възможност по-горе изброените стъпки да бъдат извършени с една команда. Тези решения са на основата

на VCS¹⁷, като Git¹⁸, предоставящи възможност за преглед на вече изпратени проекти и проверката им само чрез браузъра. В същото време Git е доста важно, дори задължително, умение за всеки програмист, който създава код.

Облачните среди за разработка са може би бъдещето. Фактът е, че Microsoft предлагат онлайн среда за разработка през 2021, версия на десктоп версията на Visual Studio Code¹⁹. Това може да е знак, че този вид интегрирани среди за разработки могат да станат все по-често използвани с времето поради по-горе изложените причини, а именно съкращаване на началната инвестиция от време в дейности по персонализиране и конфигуриране, по-малко проблеми поради различия на от системата на един до системата на друг такъв и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poulton, N. The kubernetes book: 2022 edition kindle edition, Nigel Poulton Page, 2022, 305 p., ISBN: B095KXMD3S.
2. <https://aws.amazon.com/cloud9/details/> (Accessed on 15.03.2022).
3. <https://github.com/features/codespaces> (Accessed on 02.04.2022).
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Cloud9_IDE (Accessed on 3.04.2022).

¹⁷ VCS (Version Control System) - Система за контрол на версиите

¹⁸ Git - Система за контрол на версиите с отворен код.

¹⁹ Visual Studio Code - Текстови редактор за програмен код за Windows, Mac OS и Linux.

THE NODE CONNECT EDUCATIONAL GAME AND ITS APPLICATION IN MATHEMATICS EDUCATION²⁰

Petar Mishev – Student

Department of Natural Sciences and Education,
University of Ruse
E-mail: s206252@stud.uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Galina Atanasova, PhD

Department of Natural Sciences and Education,
University of Ruse
Phone: +359 82 888 326
E-mail: gatanasova@uni-ruse.bg

Abstract: *The article presents the advantages of using computer games in education, especially for young students. Computer games are considered from the point of view of a learning tool, as well as their advantages in their use for educational purposes. An author's game is presented, which can be successfully used in mastering the basic arithmetic operations in primary school and preschool age.*

Keywords: *Game-based Learning, Mathematics, Education.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Компютърните игри са приятно занимание при наличие на свободно време. Съвременните игри могат да изглеждат и функционират по най-различни начини благодарение на възможностите на съвременната компютърна техника. Тяхното развитие води до еволюция в приложението и използването на игрите от обикновено средство за развлечение и уплътнение на време до средство за обучение.

Игри като образователен инструмент не е нова идея, много проучвания доказват че чрез игри може да се развие логическото мислене и дори да се подобри състоянието на хора с умствени увреждания. Използването на игрите за образователни цели е с идея да помогнат на хората да научат нещо или да се запознаят с определени теми, да разширят концепциите си или да придобият нови умения, докато играят. Те са интерактивен начин за учене, чрез който да се получат определени знания и умения като цели, правила, адаптиране, решаване на проблеми, взаимодействие, езици, специални умения и т.н. Те задоволяват фундаменталната потребност на хората от учене, чрез осигуряване на удоволствие, страстно участие, забавление, структура, мотивация, удовлетворение на егото, адреналин, творчество, социално взаимодействие и емоция.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Предимства при използването на игрите с образователна цел

Игрите с образователна цел носят редица ползи по отношение на интелектуалното и личностното развитие на човека. Те на практика са подходящи за хора от всички възрастови групи. Разбира се, най-добре е ако използването на полезните свойства на образователните игри започне още в ранна детска възраст. Полезните свойства на използването на игрите с образователна цел може да бъдат конкретизирани по следния начин:

- Увеличаване капацитета на мозъка – основно предимство на игрите, особено когато става въпрос за използването им от деца. Играенето стимулира дейността на човешкия мозък, спомага за подобряване на функциите му, както и за увеличаване на неговия

²⁰ Докладът е представен на студентската научна сесия на 27.05.2022 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ОБРАЗОВАТЕЛНАТА ИГРА NODE CONNECT И НЕЙНОТО ПРИЛОЖЕНИЕ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА.

капацитет. Именно поради тези причини през последните години игрите започват да се прилагат все повече като метод за обучение в училищата и университетите.

- Подобряване на компютърните умения – повечето от съвременните игри са неизменно свързани с работата с компютър. Умение, което е изключително важно в съвременния развит и високотехнологичен свят. Когато още от детска възраст бъдат изградени умения за работа с компютър, по-нататък всичко става доста по-лесно. А в мрежата могат да бъдат намерени множество сайтове, осигуряващи на децата занимателни и в същото време и образователни игри.

- Изграждане на стратегическо мислене – голяма част от разнообразните игри действително спомагат за изграждане на стратегическо и дългосрочно мислене у човека. Такъв тип мислене в игрите служи за преодоляване на отделните препятствия и преминаване на следващите нива. Но това съвсем не е всичко. Игри също така имат важна роля и по отношение изграждане на умение за вземане на най-точните и правилни решения в напрегнати ситуации. Умение, което безспорно носи множество ползи в ежедневието.

- Развиване на социални контакти – повечето игри, налични в мрежата, дават възможност за взаимодействие и контакт с други хора. Това може да се окаже доста полезно за социалния живот на човека и разширяването на кръга от познати, с които общува. Безспорен факт е, че голяма част от съвременните хора използват игрите и като платформа, на която да се забавляват и чатят с приятели, или пък да реализират нови запознанства на база общи интереси, хобита и теми за разговор.

- Повишаване на фокуса – игрите имат изключително полезен ефект в тази посока. Те могат значително да повишат способността на хората за концентрация, фокусиране и насочване на усилията към постигане на дадена цел. Подобно въздействие на игри се вижда най-вече при хора, които по принцип са нетърпеливи и при липса на бързи резултати от дадена дейност, лесно се фрустрират и отказват от по-нататъшни опити. Често обаче тези хора успяват да се фокусират за по-дълги периоди от време върху игри, даващи реални възможности за постигане на напредък и преминаване на следващите нива.

- Полезни за увереността – според различни изследвания игрите са пряко свързани и с повишаването на самочувствието на хората и тяхната увереност в собствените знания и възможности. Играенето насърчава креативното мислене и изпробването на различни варианти и възможности за разрешаване на даден проблем. А при постигане на дадена цел в тях (като например преминаване на следващото ниво), човек получава чувство на удовлетвореност от себе си и своите действия и преценки. В определени салучаи това чувство на удовлетвореност може дори да послужи като стимул за поемане на разумни рискове в други аспекти от живота.

- Освобождаване от стреса – игрите помагат за освобождаване от натрупаните в ежедневието стрес и напрежение. Нещо повече, те са начин за научаване на нови неща и тренировка на знания и възможности без страх от подигравки, присмех и други неприятни реакции на околните. Чрез игрите хората съчетават полезното с приятното и това ги прави изключително подходящи за запълване на свободното време.

- Положителна роля при дефицит на вниманието – и не на последно място, игрите действително помагат на хора, при които се наблюдават дефицит на вниманието или други психични разстройства. Полезното въздействие на игрите върху хора от тези групи е изведено за първи път от професори от Нотингамския университет и впоследствие потвърдено на база редица научни изследвания.

Видове игри с образователна цел

Може да се каже, че развитието и усъвършенстването на игрите до голяма степен е свързано с основните тенденции в съвременния глобализиран и технологичен свят. Или казано с други думи, с навлизането на технологиите и техниката в живота на хората се наблюдава промяна в начина, по който те играят. Традиционните и най-широко разпространени преди време игри с образователна цел като шах например, сега са до голяма степен изместени от видео и електронни образователни игри. А най-новите и модерни игри

са все повече ориентирани към наблюдение на поведението и реакциите на потребителите и постигане на желаното въздействие върху тях. Може да бъдат класифицирани следните видове игри с образователна цел:

- Традиционни образователни игри – като типичен представител на тази група образователни игри можем да изведем шахът. Ползите от играенето на шах са повече от ясни. Тази образователна игра стимулира стратегическото мислене, внимателното планиране на следващите ходове и търпението в процеса на преследване на целта. С развитието на технологиите все по-рядко може да се видят хора, застанали пред традиционните шахматни дъски. И все пак приложението на тази образователна игра донякъде се запазва благодарение на нейните онлайн версии, които носят по-голямо удобство, гъвкавост, както и възможност за социални контакти с по-широк кръг от хора.

- Електронни образователни игри – игрите от този вид са наистина безброй. Те могат да са свързани с най-различни аспекти от ежедневието и интересите на хората. Част от електронните образователните игри се насочват по-скоро към тестване на бързите реакции и рефлексии, а други – към развиване на знания и умения в отделни области. Видео образователните игри са изключително подходящи за средностатистическото съвременно дете, обичащо да прекарва доста време пред компютъра, както и да търси забавлението във всяка една своя дейност.

- Поведенчески образователни игри – това е най-новият и модерен вид игри с образователна цел, използващи се все по-често заради множеството полезни приложения, които имат. Тенденцията при тези игри е да наблюдават поведението и реакциите на потребителите, да определят техните знания, умения, възможности, профил (психичен, емоционален и т.н.), и да реагират по различен начин според събраната информация за всеки един потребител и целите, които трябва да се постигнат. Основното предимство на поведенческите образователните игри е по-голямата възможност за положително въздействие върху поведението, както и за оказване на помощ на човек във връзка с преодоляване на различни проблеми, трудности и колебания, които пречат на нормалното му развитие и съществуване.

Една от сферите на образованието, в която компютърните игри са вече използвани, е в обучението по математика. Те спомагат при обучението на деца в училищна и предучилищна възраст като представят задачите под формата на интересни пъзели или предизвикателства с числа (LaPierre, J., 2019).

На Фиг. 1, по-долу, е показано как чрез подобряването в презентацията на една задача, може да се постигне улеснение в разбирането ѝ. Освен че спласва много ученици, символичното представяне на проблема създава значително натоварване, защото е статично представяне на вътрешно динамичен процес за решаване на система от уравнения. А от ляво, представянето е по-динамично. Целта е да се завъртят двете зъбни колелета, така че да се достигне до ключовете, които се намират на зъб 8 и 22.

Тези игри притежават някои общи характеристики:

- Висококачествено изпълнение – визуално, звуково и функционално те доближават другите игри, които нямат образователна цел.

- Достъпно представяне на математическите проблеми – макар и понякога да се показват основните математически действия (събиране, изваждане, деление и умножение), те са представяни като малко препятствие, което дели играча от целта на играта.

- Наличието на цел – повечето игри от този тип имат някаква цел и дори сюжет, в който играчите могат да се фокусират. Това работи в полза за играча, защото му помага да види, че самият той се развива и подобрява.

Same Math, Different Representation

Collect the keys to free the Wuzzit



For maximum stars, use the least number of moves. For maximal points, collect the bonus items before you pick up the last key.

Solve the system of equations

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6y_1 &= z_1 & (\text{mod } 65) \\ 4x_2 + 6y_2 &= z_2 - z_1 & (\text{mod } 65) \\ 4x_3 + 6y_3 &= z_3 - z_2 & (\text{mod } 65) \\ &\dots & \dots \\ 4x_n + 6y_n &= z_n - z_{n-1} & (\text{mod } 65) \end{aligned}$$

subject to the constraints

$$0 \leq x_i, y_i \leq 5, \quad x_i y_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

so that 8, 22, 32, 46 are members of the trace set

$$\begin{aligned} &\{4i \mid 1 \leq i \leq x_1\} \cup \{6i \mid 1 \leq i \leq y_1\} \cup \\ &\{z_1 + 4i \mid 1 \leq i \leq x_2\} \cup \{z_1 + 6i \mid 1 \leq i \leq y_2\} \cup \\ &\{z_2 + 4i \mid 1 \leq i \leq x_3\} \cup \{z_2 + 6i \mid 1 \leq i \leq y_3\} \cup \\ &\dots \dots \dots \\ &\{z_{n-1} + 4i \mid 1 \leq i \leq x_n\} \cup \{z_{n-1} + 6i \mid 1 \leq i \leq y_n\} \end{aligned}$$

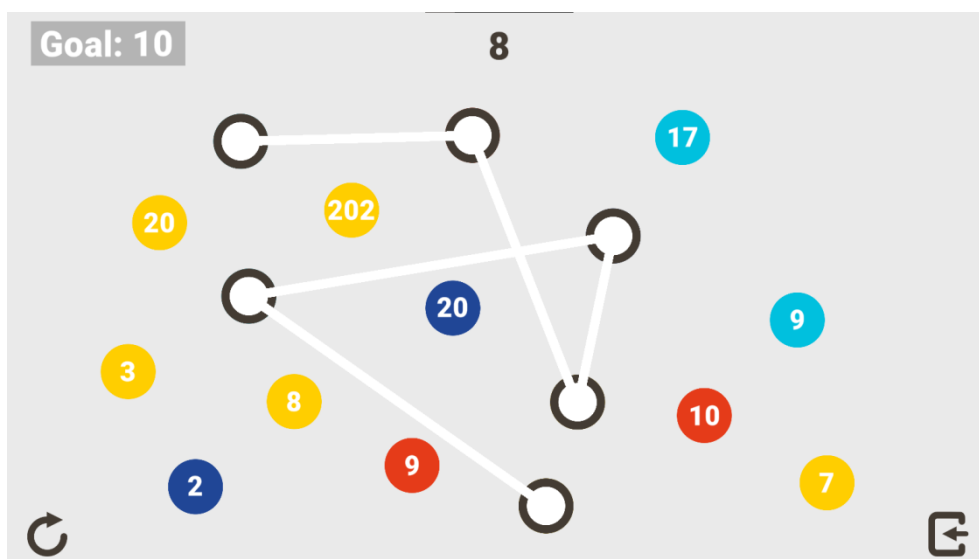
For maximum stars, solve with n minimal.
For maximal points, ensure that one of 8, 22 occurs in the final component of the trace set.

Фиг. 1. Играта Wuzzit Trouble (ляво), задачата която представлява (дясно)

Предложеното решение

Играта Node Connect е логическа игра, в която играчът трябва да използва основните аритметични изрази: събиране, изваждане, деление и умножение, за да достигне предварително определена от нивото аритметична стойност.

На Фиг. 2 е показано едно ниво от играта, в което се изисква да се достигне стойност 10, а играещият е постигнал за дадения момент 8.



Фиг. 2. Ниво от Node Connect

Играта работи по следния начин. Играчът влиза в нивото и бива посрещнат от пространство, изпълнено с най различно оцветени точки, в които се съдържат числа. Всеки цвят съответства на аритметичен символ, с който се изпълни уравнението, а числото вътре, стойността, с която действието ще се извърши. (Atienza, S., Matlen, B., Devlin, D., & Weiner, R., 2018)



Фиг. 3 Цветовете и техните действия в Node Connect.

Идеята зад това оцветяване (Фиг. 3) е да може бързо да се научи кой кръг какво прави. Например червен кръг със стойност 5 ще означава умножение с 5 (стойност до момента $\times 5$), светло син със стойност 8 ще означава изваждане с 8 (стойност до момента $- 8$) и т.н.

Ключова възможност на Node Connect е, че стимулира играчът да не пропуска през нивата, а да намери колкото се може повече решения в дадено ниво. Това спомага за развиване на креативното мислене. Допълнително, това може да мотивира сплотяване между играчите, с цел намиране на нови решение или споделяне на вече познати.

Използвани технологии

Играта е направена в Unity Engine. Причината за този избор е предварителния опит на автора с програмният език C#. В допълнение Unity (Unity Platform, 2021) е най-ползваният engine сред малките разработчици и е налична достатъчно количество документация за работа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проектът е наличен online и може да бъде безплатно изтеглен на: <https://ravenexp.itch.io/node-connect>.

Бъдещи планове:

- Добавяне на допълнителни нива;
- Добавяне на допълнителни математически действия като корен квадратен и степенуване като част от играта;
- Наличност в големите игрални платформи: Steam, Google Play и Apple App Store.

ЛИТЕРАТУРА

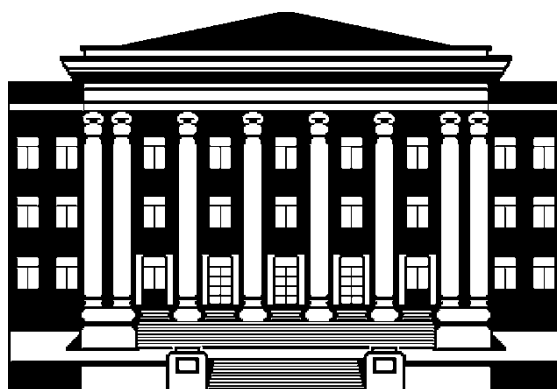
Atienza, S., Matlen, B., Devlin, D., & Weiner, R. (2018). Game-Based Learning with Direct Representation of Mathematics. Stanford University. URL: https://web.stanford.edu/~kdevlin/Papers/Atienza_CLS_Games_Based_Math_2018.pdf (Accessed on 21.04.2022).

LaPierre, James. (2019). 5 Must-Play Math Learning Games for Middle Schoolers. URL: <https://www.filamentgames.com/blog/5-must-play-math-learning-games-for-middle-schoolers/> (Accessed on 21.04.2022).

Unity Platform. (2021). URL: <https://unity.com> (Accessed on 21.04.2022).

UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“

UNION OF SCIENTISTS - RUSE



**62-TH ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE
OF UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“
AND UNION OF SCIENTISTS – RUSE**

OCTOBER 2023

I N V I T A T I O N

**Ruse, 8 Studentska str.
University of Ruse
Bulgaria**

PROCEEDINGS
Volume 61, Series 6.5

Financial Mathematics
&
Informatics

Under the general editing of:
Assoc. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD

Editor of Volume 61:
Prof. Diana Antonova, PhD

Bulgarian Nationality
First Edition

Printing format: A5
Number of copies: on-line

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



PUBLISHING HOUSE
University of Ruse "Angel Kanchev"