

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

UNIVERSITY OF RUSE “Angel Kanchev”
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ “Ангел Кънчев”

BSc, MSc and PhD Students & Young Scientists
Студенти, докторанти и млади учени

PROCEEDINGS

Volume 63, book 6.7.
Financial Mathematics
&
Informatics

НАУЧНИ ТРУДОВЕ

Том 63, серия 6.7.
Финансова математика
&
Информатика

Ruse
Русе
2024

Volume 63 of PROCEEDINGS includes the papers presented at the scientific conference RU&SU'24, organized and conducted by University of Ruse "Angel Kanchev" and the Union of Scientists - Ruse. Series 6.7 contains papers reported in the Financial Mathematics and Informatics sections.

Book	Code	Faculty and Section
Agrarian and Industrial Faculty		
1.1.	FRI-8.303b-1-AMT&ASVM	Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine
	FRI-1.202-1-MR	Maintenance and Reliability
	FRI-9.2-1-THPE	Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment
	FRI-19.206-1-EC	Ecology and Conservation
	FRI-16.203-1-ID	Industrial Design
1.2.	THU-SSS-AMT&ASVM	Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine
	THU-SSS-MR	Maintenance and Reliability
	THU-SSS-THPE	Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment
	THU-SSS-EC	Ecology and Conservation
	THU-SSS-ID	Industrial Design
Faculty of Mechanical and Manufacturing Engineering		
2.1.	FRI-1.317-1-MEMBT	Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies
2.2.	TUE-1.417-SSS-MEMBT	Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies
Faculty of Electrical Engineering Electronics and Automation		
3.1.	FRI-10.326-1-EEEE	Electrical Engineering, Electronics and Automation
3.2.	FRI-2G.303-1-CCT1	Communication and Computer Technologies 1
	FRI-2G.302-1-CCT2	Communication and Computer Technologies 2
3.3.	THU-10.326-SSS-EEEE	Electrical Engineering, Electronics and Automation
	THU-2G.303-SSS-CCT	Communication and Computer Technologies
Faculty of Transport		
4.1.	FRI-KC.H2-1-TMS	Transport and Machine Science
	SAT-KC.H2-1-TMS	Transport and Machine Science
4.2.	FRI-20.21-2-SITSTL	Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics
4.3.	MON-5.21-SSS-TMS	Transport and Machine Science
Faculty of Business and Management		
5.1.	FRI-2B.412-1-EM1	Economics and Management
5.3.	THU-2G404-SSS-EM	Economics and Management
5.4.	FRI-2G.510-1-ESIS	European Studies and International Security
8.2.	FRI-1.322-1-SW	Social Work
Faculty of Natural Sciences and Education		
6.1.	FRI-1.414-MIP	Mathematics, Informatics and Physics
6.2.	FRI-2G.305-1-PP	Pedagogy and Psychology
6.3.	FRI-2G.309-1-LL	Linguistics and Literature
	FRI-12.23-1-AS	Art Studies
6.4.	FRI-2G.307-1-ERI	Education - Research and Innovations

6.5.	FRI-1.219-SSS-PP	Pedagogy and Psychology
6.6.	FRI-2G.405-SSS-LLA	Linguistics, Literature and Art Science & History, Ethnology and Folklore
6.7.	FRI-2.203-SSS-FM	Financial Mathematics
	FRI-1.407.1-SSS-I	Informatics
Faculty of Law		
7.1.	FRI-2B.313-1-L	Law Studies
	SAT-2B.313-1-L	Law Studies
7.2.	FRI-2B.312-1-NS	National Security
7.3.	WED-2B313-SSS-L	Law Studies
Faculty of Public Health and Health Care		
8.1.	FRI-2K.201-1-HP	Health Promotion
8.3.	FRI-2G.104-1-HC	Health Care
8.4.	FRI-2G.309-1-MCDA	Medical and Clinical Diagnostic Activities
8.5.	THU-K.101-SSS-HP	Health Promotion
	THU-2.101-SSS-HC	Health Care
	THU-2Г.105-SSS-MCDA	Medical and Clinical Diagnostic Activities
Quality of Education Directorate		
9.1.	FRI-2.104-1-QHE	Quality of Higher Education
Razgrad Branch of the University of Ruse		
10.1.	FRI-LCR-1-CT(R)	Chemical Technologies
	FRI-LCR-P-1-CT(R)	Chemical Technologies (Poster session)
10.2.	FRI-LCR-1-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies
	SAT-LCR-P-1-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies (Poster session)
10.3.	TUE-SSS-BFT(R)	Biotechnologies and Food Technologies
	TUE-SSS-CT(R)	Chemical Technologies
Silistra Branch of the University of Ruse		
11.1.	FRI-110-1-PPM(S)	Pedagogy; Psychology and Methodology of training in...
	FRI-229-1-P(S)	Philology
	FRI-216-1-TS(S)	Technical Sciences
11.2.	FRI-239-I-PMT(S)	Pedagogy and Methodology of Training in...
	FRI-229-I-H(S)	Humanities
	FRI-216-I-TS(S)	Technical Sciences

The papers have been reviewed.

ISSN 1311-3321 (print)

ISSN 2535-1028 (CD-ROM)

ISSN 2603-4123 (on-line) Copyright © authors

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.

The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access

PROGRAMME COMMITTEE

- **Prof. Amar Ramdane-Cherif**
University of Versailles, France
- **Assoc. Prof. Manolo Dulva HINA**
ECE Paris School of Engineering, France
- **Prof. Leon Rothkrantz**
Delft University of Technology, Netherlands
- **Assoc. Prof. Antonio Jose Mendes**
University of Coimbra, Portugal
- **Prof. Ville Leppanen**
University of Turku, Finland
- **Assoc. Prof. Marco Porta**
University of Pavia, Italy
- **Prof. Douglas Harms**
DePauw University, USA
- **Prof. Zhanat Nurbekova**
L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur Sultan, Kazakhstan
- **Prof. Mirlan Chynybaev**
Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyzstan
- **Prof. Ismo Hakala, PhD**
University of Jyväskylä, Finland
- **Prof. Artur Jutman, PhD**
Tallinn University of Technology, Estonia
- **Prof. RNDr. Vladimír Tvarožek, PhD**
Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava, Slovakia
- **Assoc. Prof. Ing. Zuzana Palková, PhD**
Slovak University of Agriculture in Nitra, Nitra, Slovakia
- **Andrzej Tutaj, PhD**
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
- **Prof. Valentin NEDEFF Dr. eng. Dr.h.c.**
“Vasile Alecsandri” University of Bacău, Romania
- **Cătălin POPA, PhD**
“Mircea cel Bătrân” Naval Academy, Constantza, Romania
- **Prof. dr Larisa Jovanović**
Alfa University, Belgrade, Serbia
- **Prof. dr hab. Edmund LORENCOWICZ**
University of Life Sciences in Lublin, Poland
- **Assoc. Prof. Ion MIERLUS - MAZILU, PhD**
Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania
- **Prof. Dojčić Vojvodić PhD**
Faculty of Philosophy, University of Novi Sad, Serbia
- **Assoc. Prof. Alexandrache Carmen, PhD**
Department of Teacher Training, “Dunărea de Jos”, Galați University, Romania
- **Prof. Alberto Cabada**
University of Santiago de Compostela, Faculty of Mathematics, Santiago de Compostela, Spain
- **Kamen Rikev, Dr Hab.**
Institute of Slavic Philology, Maria Curie-Skłodowska University in Lublin, Poland
- **Anna Klimentova, PhD**
Constantine the Philosopher University of Nitra, Slovakia

- **Prof. Ricardo Gobato, PhD**
Secretariat of State of Parana Education and Sport, Laboratory of Biophysics and Molecular Modeling Genesis, Brasil
- **Prof. Fatima Rahim Abdul Hussein, PhD**
University of Misan, College of Basic Education, English Department, Iraq
- **Prof. Liqaa Habeb Al-esedi, PhD**
English Department, College of Education for Human Science, University of Diyala, Iraq
- **Prof. Esengeldin Baurzhan Satybaldyuly, PhD**
Pavlodar Pedagogical University "Alkey Margulan", Kazakhstan
- **Prof. Igor Kevorkovich Danilov, DSc**
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia
- **Prof. Aleksander Valentinov Sladkowski, DSc**
Silesian University of Technology, Poland
- **Prof. Vera Karadjova, PhD**
"St. Kliment Ohridski" University – Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia
- **Prof. Aleksandar Trajkov, PhD**
"St. Kliment Ohridski" University - Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia
- **Prof. Petar Pepur, PhD**
University of Split, Croatia
- **Prof. Korhan Arun, PhD**
Namik Kemal University, Tekirdağ, Turkey
- **Prof. Yuliya Yorgova, PhD**
Burgas Free University, Bulgaria
- **Jelena Stankovic, PhD**
University of Nis, Serbia
- **Jovica Stankovic, PhD**
University of Nis, Serbia
- **Prof. Dr. Diana E. Woolfolk Ruiz**
CETYS University, Mexico
- **Prof. Gerhard Fiolka, PhD**
University of Fribourg, Switzerland
- **Prof. Haluk Kabaalioglu, PhD**
Yeditepe University, Turkey
- **Prof. Silva Alves, PhD,**
University of Lisbon, Portugal
- **Hanneke van Bruggen, DHC mult**
Appeldoorn, The Netherlands
- **Prof. Elena Torina**
Tula State Pedagogical University "L. N. Tolstoy", Tula, Russia
- **Prof. Violeta Jotova**
Direction Pediatrics at St. Marina University Hospital - Varna, Bulgaria, Chair ESPE
Postgraduate Qualification Committee
- **Prof. Tanya Timeva, MD, PhD**
Obstetrics and Gynecology Hospital "Dr. Shterev", Sofia, Bulgaria
- **Prof. Kiril Stoychev, PhD,**
Institute of Metal Science, Equipment and Technologies "Acad. A. Balevsci" with
Hydroaerodynamics centre – BAS, Bulgaria
- **Assoc. Prof. Mark Shamtsyan, PhD**
Technical University, Saint Petersburg, Russia
- **Assoc. Prof. Oleksii Gubenia, PhD**
National University of Food Technologie, Kiev, Ukraine

- **Prof. Olexandr Zaichuk, DSc**
Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnepropetrovsk, Ukraine
- **Prof. Eugene Stefanski, DSc**
Samara University, Russia
- **Assoc. Prof. Tatiana Strokovskaya, PhD**
International University of Nature “Dubna”, Dubna, Russia
- **Prof. DSc. Petar Sotirow**
Maria Curie-Sklodowska University of Lublin, Poland
- **Accos. Prof. Krassimir Dochev Dochev, PhD**
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Mariana Yordanova Docheva, PhD**
University of Portsmouth School of Engineering, UK
- **Assoc. Prof. Ivan Antonov Lukanov, PhD**
University of Botswana, Faculty of Engineering and Technology, Gaborone, Botswana
- **Assoc. Prof. Petko Vladev Petkov, PhD**
Research Associate Cardiff University, UK
- **Prof. Stepan Terzian DSc**
Bulgarian Academy of Science, Bulgaria
- **Prof. Gabriel Negreanu, PhD**
University Politehnica of Bucharest, Romania
- **Prof. Dobrin Vasilev, MD, PhD**
UMHAT Medica Cor, Ruse, Bulgaria
- **Prof. Nicolae Craciunoiu**
University of Craiova
- **Assoc. Prof. Stelian Tarulescu**
Transilvania University of Brasov
- **Assoc. Prof. PhD Andrei-Alexandru Boroii**
University of Pitești
- **Prof. Renzo Capitani, PhD**
University of Florence, Engineering School, Italia
- **Prof. Radoslaw Wrobel, DSc**
Wrocław University of Science and Technology, Poland
- **Assoc. Prof. Darina Dimitrova PhD**
University of Economics - Varna

ORGANISING COMMITTEE

◆ **ORGANIZED BY: UNIVERSITY OF RUSE (UR) AND
UNION OF SCIENTISTS (US) - RUSE**

◆ **ORGANISING COMMITTEE:**

• **Chairperson:**

Prof. Plamen Kangalov – Rector of UR, Chairperson of US – Ruse,
Prof. DTSc. Hristo Beloev, DHC mult., Academician of Bulgarian Academy of Sciences

• **Scientific Secretary:**

Assoc. Prof. Desislava Atanasova, PhD
datanasova@uni-ruse.bg; 082/888 249

• **THEMATIC FIELDS:**

• **Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Sciences and Veterinary Medicine**

Assoc. Prof. Атанас Атанасов, PhD,
aatanasov@uni-ruse.bg, +359 885 497 406

• **Maintenance and Reliability**

Prof. Mitko Nikolov, DSc,
mnikolov@uni-ruse.bg, +359 82 888 458

• **Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment**

Prof. Gencho Popov, DSc,
gspopov@uni-ruse.bg, +359 82 888 441

• **Ecology and Conservation**

Assoc. Prof. Plamen Manev, PhD,
pmanev@uni-ruse.bg, +359 889 382 797

• **Industrial Design**

Assoc. Prof. Yordan Doichinov, PhD,
doichinov@uni-ruse.bg, +359 887 273 040

• **Pedagogy; Psychology and Methodology of training in...; (18.10.24, Silistra)**

Assoc. Prof. Diana Zhelezova-Mindizova, PhD,
dmindizova@uni-ruse.bg

• **Philology (27.10.23, Silistra)**

Assoc. Prof. Rumiana Lebedova, PhD,
rlebedova@uni-ruse.bg

• **Technical Sciences (27.10.23, Silistra)**

Assoc. Prof. Evgenia Goranova, PhD,
egoranova@uni-ruse.bg

• **Chemical Technologies (08-09.11., Razgrad)**

• **Biotechnologies and Food Technologies (08-09.11., Razgrad),**

Prof. Tsvetan Dimitrov, PhD,
conf_rz@abv.bg, +359 887 631 645

• **Mechanical Engineering and Machine-building Technologies**

Prof. Ivelin Ivanov, PhD,
ivivanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 472

- **Electrical Engineering, Electronics and Automation**
Assoc. Prof. Boris Evstatiev, DSc, bevstatiev@uni-ruse.bg, +359 82 888 371,
Assoc. Prof. Kiril Sirakov, csirakov@uni-ruse.bg, +359 82 888 364
- **Communication and Computer Systems**
Assoc. Prof. Yordan Kalmukov, jkalmukov@uni-ruse.bg, +359 82 888 681,
Assoc. Prof. Adriana Borodzhieva, PhD, aborodzhieva@uni-ruse.bg, +359 82 888 734
- **Transport and Machine Science**
Assoc. Prof. Tonch Balbuzanov,
tbalbuzanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 608
- **Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics**
Prof. Velizara Pencheva, PhD,
vpencheva@uni-ruse.bg, +359 82 888 558, +359 82 888 608
- **Economics and Management**
Pr. Assist. Prof. Miroslava Boneva, PhD, mboneva@uni-ruse.bg, +359 82 888 776,
Pr. Assist. Prof. Elizar Stanev, PhD, eastanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 557
- **European studies and International Security**
Prof. Vladimir Chukov, DSc, vchukov@uni-ruse.bg, 0889 768745,
Pr. Assist. Elizar Stanev, eastanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 557
- **Mathematics, Informatics and Physics**
Prof. Tsvetomir Vasilev, PhD,
tvasilev@uni-ruse.bg, +359 82 888 475
- **Education - Research and Innovations**
Pr. Assist. Prof. Ralica Vasileva-Ivanova, PhD,
rivanova@uni-ruse.bg, 0884 109 719
- **Pedagogy and Psychology**
Assoc. Prof. Valentina Vasileva, PhD, vvasileva@uni-ruse.bg, 0898 407 577,
Assoc. Prof. Galina Georgieva, PhD, gggeorgieva@uni-ruse.bg, 0889 951 920
- **History, Ethnology and Folklore**
Assist. Prof. Veselka Radeva, PhD,
vradeva@uni-ruse.bg, 082888437
- **Linguistics, Literature and Art Science**
Assoc. Prof. Velislava Doneva, PhD,
doneva_v@uni-ruse.bg, 0886 060 299
- **Health Promotion**
Assoc. Prof. Stefka Mindova, PhD,
smindova@uni-ruse.bg, +359 882 895 149
- **Social Work**
Pr. Assist. Prof. Ana Popova, PhD,
apopova@uni-ruse.bg, +359 889 874 219
- **Medical and Clinical Diagnostic Activities**
Pr. Assist. Deniza Trancheva, MD, PhD,
dtrancheva@uni-ruse.bg, +359 82 888 410
- **Health care**
Assoc. Prof. Tsveta Hristova, PhD,
tshristova@uni-ruse.bg, +359 878 389 793
- **Law**
Assoc. Prof. Elitsa Kumanova, PhD,
ekumanova@uni-ruse.bg, +359 884 980 050

- **National Security**
Assoc. Prof. Milen Ivanov, DSc,
poligon@abv.bg, +359 82 888 736
- **Quality of Higher Education**
Prof. Ivanichka Serbezova, PhD, iserbezova@uni-ruse.bg,
Daniela Todorova, dtodorova@uni-ruse.bg, +359 82 888 378

- **REVIEWERS:**

FINANCIAL MATHEMATICS

- Prof. Angela Slavova, DSc
- Assoc. Prof. Iliya Brayanov, PhD
- Assoc. Prof. Evelina Veleva, PhD

INFORMATICS

- Accos. Prof. Desislava Atanasova, PhD
- Accos. Prof. Desislava Baeva, PhD

FINANCIAL MATHEMATICS

Content

1. FRI-2.203-SSS-FM-01	11
Deep Neural Networks for Detection of Credit Card Fraud <i>Rostislava Ilieva, Maya Markova</i>	
2. FRI-2.203-SSS-FM-02	21
Analysis of Insurance Claim Reserves for Motor Vehicles Using Classical Chain Ladder Method and Robust Chain Ladder Method <i>Petya Georgieva, Elitsa Raeva</i>	
3. FRI-2.203-SSS-FM-03	27
Analysis of Criteria for Arima Model Selection <i>Preslav Karanedeff, Elitsa Raeva</i>	
4. FRI-2.203-SSS-FM-04	34
Investment Strategy for Forming a Portfolio of Competitive Assets <i>Simona Petrova, Elitsa Raeva</i>	
5. FRI-2.203-SSS-FM-05	41
Engel's Curve: Modeling the Relationship Between Consumption and Income <i>Blagovesta Petrova, Vesela Mihova</i>	
6. FRI-2.203-SSS-FM-06	42
Forecasting Prices and Compiling an Optimal Risk Portfolio of Stocks and Bonds <i>Gyulen Hristov, Vesela Mihova</i>	
7. FRI-2.203-SSS-FM-07	48
Modelling the Relationship Between Gross Domestic Product and Changes in the Broad Monetary Aggregate <i>Mertan Ismet, Vesela Mihova</i>	
8. FRI-2.203-SSS-FM-08	54
European Option Pricing with Collateral Under the Heston Model <i>Nedelina Nedeva, Tihomir Gyulov</i>	
9. FRI-2.203-SSS-FM-09	62
On Synchronization of Neuronal Dynamics with Slow Inhibitory synapses II: Additional Analytical Results <i>Teodor Georgiev, Julia Chaparova</i>	

INFORMATICS

Content

- | | |
|--|----|
| 1. FRI-1.407.1-SSS-I-01 | 70 |
| Advantages and Disadvantages of developing a System for Interaction Between the Player and the Game Environment in the Game Eternal Vigil | |
| <i>Serkan Sadulov, Mustafa Mustafov, Kamelia Shoilekova</i> | |
| 2. FRI-1.407.1-SSS-I-02 | 72 |
| GPassistant Medical Software | |
| <i>Bozhidar Dachev, Katalina Grigorova</i> | |

DEEP NEURAL NETWORKS FOR DETECTION OF CREDIT CARD FRAUD¹

Rostislava Ilieva, Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: rostislava07@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Maya Markova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse, "Angel Kanchev"
E-mail: maya.markova@gmail.com

Abstract: This paper presents the development and evaluation of a deep neural network for credit card fraud detection. The primary goal of the research is to enhance the accuracy and fairness of the model by employing a class weighting technique to address the issue of imbalanced data. Several fully connected layers with ReLU and sigmoid activation functions are included in the model's architecture, and the input data undergoes preprocessing and scaling. The model is trained using the Adam optimizer and binary cross-entropy loss function. Class weighting applies to reduce the impact of dominant legitimate transactions and ensure the model effectively recognizes the rare fraudulent cases.

The results show the model achieves high accuracy, reaching a Weighted Precision of 1.00 and a Weighted Recall of 0.99 on the test data. These metrics highlight the model's ability to identify fraudulent transactions with minimal false positives. The study indicates that incorporating class weighting is a successful technique for enhancing the performance of fraud detection models, particularly in situations where data imbalance is a concern. This has significant implications for the financial industry, where precise fraud detection is critical for preventing financial losses.

ВЪВЕДЕНИЕ

Изследването на възможностите на дълбоките невронни мрежи (ДНМ) за откриване на измами с кредитни карти разкрива една интересна и важна сфера в областта на финансите. Тъй като измамите с кредитни карти продължават да бъдат сериозен проблем както за потребителите, така и за финансовите институции, разработването на ефективни и прецизни методологии за установяване на измамни дейности става от първостепенно значение.

За целите на тази статия използваме набор от данни, получени от kaggle.com, който съдържа данни за транзакции от септември 2013 г., извършени от европейски картодържатели. Наборът от данни включва общо 284 807 транзакции, от които само 492 са определени като измамни дейности. Това представлява силно дисбалансиран набор от данни, като измамните транзакции представляват едва 0,17 % от целия набор от данни.

Измамите с кредитни карти обхващат неразрешено използване на кредитни или дебитни карти за покупки, теглене на пари в брой или прехвърляне на средства. Те могат да се осъществят по различни начини, включително чрез откраднати или изгубени карти, скимиране на карти, фишинг и кражба на самоличност. Откриването и предотвратяването на измамни транзакции е от първостепенно значение за защитата на потребителите и намаляването на финансовите загуби на банките и другите финансови институции.

Основното предизвикателство, с което се сблъскваме при използването на тази съвкупност от данни за разработване на ДНМ модели, е подчертано небалансираният характер на данните. Традиционните алгоритми за машинно обучение могат да се затруднят с ефективното идентифициране на измамни транзакции, когато са изправени пред такъв

¹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31. 05. 2024 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ИЗПОЛЗВАНЕ НА ДЪЛБОКИ НЕВРОННИ МРЕЖИ ЗА ОТКРИВАНЕ НА ИЗМАМИ С КРЕДИТНИ КАРТИ.

значителен дисбаланс на класовете. Този проблем с дисбаланса може да породи пристрастни модели, които дават приоритет на точността в мнозинството, като същевременно пренебрегват малцинствения клас, който представлява значителен интерес.

За да се справим с това затруднение, ще разгледаме различни техники за оценяване на ДНМ модели върху небалансирани данни, включително точност (precision), чувствителност (recall), F1 резултат (F1 score) и площ под кривата на операционната характеристика на приемника (AUC-ROC). Тези показатели предоставят ценна информация за ефикасността на модела, особено при определянето на процента на истинските положителни резултати и минимизирането на фалшивите отрицателни резултати.

Използвайки Python, конструираме и обучаваме дълбока невронна мрежа за анализ на данни за транзакции с кредитни карти и разкриване на измамни дейности. Използвайки силата на ДНМ, стремежът ни е да изследваме възможностите на дълбоките невронни мрежи за ефективно идентифициране на измами с кредитни карти.

RELATED WORKS²

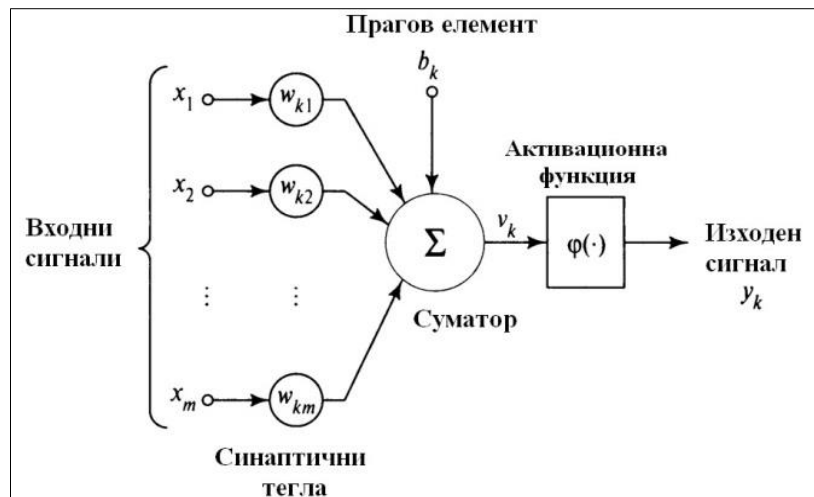
Дълбоките невронни мрежи (ДНМ) се превръщат в мощен инструмент за откриване на измами с кредитни карти, особено при работа с небалансирани набори от данни. Предизвикателството на дисбаланса на класовете, при който измамните трансакции са значително по-малобройни от легитимните, е често срещан проблем при откриването на измами с кредитни карти. Този дисбаланс може да изкриви работата на моделите за машинно обучение, поради което е изключително важно да се използват подходящи показатели за оценка, които точно отразяват способността на модела да открива измами. Изследванията показват, че алгоритмите за дълбоко обучение, включително ДНМ, могат да постигнат висока точност при идентифицирането на измамни трансакции. Например, едно проучване показва, че техника, базирана на ДНМ, постига точност от 99,93%, площ под кривата (AUC) от 99,99% и прецизност от 99,89% върху набор от данни, включващ както измамни, така и легитимни трансакции (Shahzad, I., A. Sajid, M. Anwar, N. Anwar, 2023). По подобен начин е установено, че използването на модели с дълга краткотрайна памет (LSTM) дава най-добри резултати за откриване на измами с кредитни карти, като постига точност от 99,9% (Shraddha, M., K. Sumedha, V.Veda Samhitha, 2023). Тези констатации подчертават ефективността на подходите за дълбоко обучение при справяне със сложността на откриването на измами с кредитни карти. Когато се оценява ефективността на моделите върху небалансирани набори от данни, от съществено значение е да се отиде отвъд традиционните показатели за точност. Препоръчва се използването на показатели за оценка като precision, recall, f1-score, Matthews Correlation Coefficient (MCC) и AUC, за да се осигури по-всеобхватна оценка на ефективността на модела. Тези метрики могат да предложат информация за способността на модела да идентифицира правилно измамни трансакции (истински положителни резултати), като същевременно минимизира фалшивите положителни резултати (Mizher, M. Z., A. B. Nassif, 20 July 2023). Точността (precision) и чувствителността (recall) са особено важни в контекста на откриването на измами, тъй като отразяват съответно точността на модела при прогнозиране на измами и способността му да улавя по-голямата част от измамните трансакции (Du, H., Lv, L., Guo, A., Wang, H.). Нещо повече, техники като Synthetic Minority Oversampling Technique (SMOTE) са използвани за справяне с дисбаланса, като се прави увеличаване на извадката на малобройния клас, като по този начин се подобрява способността на модела да открива измами (Du, H., Lv, L., Guo, A., Wang, H.), (Bhowmik, A., M. Sannigrahi, D. Chowdhury, A. D. Dwivedi and R. Rao Mukkamala). В други проучвания са изследвани различни алгоритми за дълбоко обучение и техники за преизбиране на данни, включително LSTM, MLP и ANN модели, заедно с методи за преизбиране като Random, SMOTE, BorderLine SMOTE, SVM SMOTE и ADASYN, за подобряване на възможностите за откриване, като в някои случаи LSTM моделите показват по-добри резултати (Kaur, D., A. Saini and D. Gupta). В заключение, внедряването на дълбоки

² Свързани произведения

невронни мрежи за откриване на измами с кредитни карти в небалансирани набори от данни демонстрира значителна ефикасност. Изборът на подходящи метрики за оценка е от решаващо значение за точната оценка на ефективността на модела, като се вземат предвид уникалните предизвикателства, породени от небалансираните данни (Jose, S., D. Devassy and A. M. Antony), (Yazna Sai, K., Venkata Bhavana, R., Sudha, N., 2023).

ДЪЛБОКИ НЕВРОННИ МРЕЖИ

Дълбоките невронни мрежи са съставени от множество нелинейни изчислителни единици или неврони (фиг. 1). Тези неврони са организирани в слоеве, за да извличат от входните данни по-дълбоки, по-стабилни и отличителни характеристики на високо ниво. Математически, тези модели имат за цел да формулират функция, която приближава вход към съответния му изход. Произходът и концепцията за проектиране на изкуствени неврони за анализ на данни датират от 1943 г., когато McCulloch и Pitts въвеждат математически модел на неврона, наречен МР-неврон. МР-невронът очертава дизайна на изкуствен неврон за симулиране на логически портове и в крайна сметка се превръща в градивен елемент за изследвания, свързани с изкуствена невронна мрежа.



Фигура 1. Модел на неврон

Дълбоките невронни мрежи представляват съвременна и мощна технология в областта на машинното обучение и изкуствения интелект, която показва изключителни резултати при решаване на сложни задачи, включително детекция на измами с кредитни карти. Основната идея зад ДНМ е използването на многослойни архитектури, които имитират начина, по който функционира човешкият мозък, за да разпознават сложни модели и зависимости в данните.

В основата на дълбоките невронни мрежи стоят невроните (фиг. 1), които са организирани в слоеве. Първият слой, известен като входен слой, получава суровите данни. Между входния и изходния слой може да има множество скрити слоеве, които извършват различни трансформации и извличания на характеристики. Всеки неврон в даден слой е свързан с невроните в следващия слой чрез връзки с определени тегла, които се актуализират по време на процеса на обучение. Изходният слой предоставя крайния резултат, който в случая на детекция на измами може да бъде индикатор дали транзакцията е измамна или легитимна.

Обучението на ДНМ изисква големи количества данни и мощни изчислителни ресурси. Процесът включва оптимизиране на теглата на връзките чрез минимизиране на функция за грешка, която измерва разликата между предсказанията на мрежата и реалните стойности. Чрез използване на методи като обратно разпространение на грешката и стохастичен градиентен спуск, ДНМ постепенно подобряват своите предсказания.

ОСОБЕНОСТИ НА НАБОРА ОТ ДАННИ

Наборът от данни, използван за това проучване, е получен от известния уебсайт kaggle.com (www.kaggle.com, 2024). Той съдържа информация, свързана с транзакции с кредитни карти, извършени през септември 2013 г., от картодържатели със седалище в Европа. В рамките на този набор от данни са разгледани общо 284 807 транзакции, от които само 492 са идентифицирани като измамни дейности. Това ясно подчертава силно небалансирания характер на набора от данни, като измамните транзакции представляват едва 0.172% от целия набор от данни. По-специално, наборът от данни обхваща единствено числови входни променливи, които са получени чрез процеса на трансформация на анализ на основните компоненти (PCA). За съжаление, поради ограничения в конфиденциалността, подробна информация за първоначалните характеристики и допълнителни подробности относно данните не се разкриват. Атрибутите, обозначени като V1, V2,... V28 са преобразувани със статистическа процедура, включваща ортогонална трансформация (PCA), като само променливите „Време“ и „Количество“ не са трансформирани. Атрибутът „Време“ означава изминалите секунди след първата транзакция, записана в набора от данни. Променливата „Количество“ представлява специфичната стойност на транзакцията, която може да бъде ключова за модели на обучение, зависещо от разходите въз основа на дадените сценарии. Освен това определящата характеристика, обозначена като „клас“, служи като променлива на отговора, като приема стойност единица в случаи на измамни транзакции и нула във всички останали случаи. (www.kaggle.com, 2024)

ПОКАЗАТЕЛИ ЗА ЕФЕКТИВНОСТ НА МОДЕЛИТЕ ЗА ОТКРИВАНЕ НА ИЗМАМНИ ТРАНЗАКЦИИ

Ефективността на моделите за откриване на фалшиви транзакции се оценява чрез различни метрики, които измерват точността и надеждността на предсказанията. Ключовите показатели включват фалшиво положителни (False Positives (FP)), фалшиво отрицателни (False Negatives (FN)), истински положителни (True Positives (TP)) и истински отрицателни (True Negatives (TN)). Фалшиво положителните представляват легитимни транзакции, неправилно идентифицирани като измамни, докато **фалшиво отрицателните са измамни транзакции, които моделът не е успял да открие**. Истински положителни са коректно идентифицирани измамни транзакции, а истински отрицателни са правилно разпознати легитимни транзакции.

Тези показатели се комбинират в матрица на объркването (confusion matrix) (фиг.2), която визуализира производителността на модела и помага за изчисляване на други важни метрики. **Precision score** (Точност) измерва точността на положителните предсказания и се дефинира като:

$$\text{Precision score} = TP / (TP + FP),$$

докато **Recall score** (Чувствителност) оценява способността на модела да открива всички измами и се изчислява като:

$$\text{Recall score} = TP / (TP + FN).$$

Високото значение на точността (Precision) и чувствителността (Recall) е критично, тъй като намаляването на фалшиво положителните (FP) минимизира ненужните проверки, а високият Recall гарантира откриване на колкото се може повече измами.

Комбинирането на тези показатели предоставя цялостна представа за ефективността на модела и помага за балансирането между точността и обхвата на детекция, което е от решаващо значение за успешното откриване на фалшиви транзакции.

		Предсказано	
		Легитимна	Измамна
Реално	Легитимна	Истински отрицателни (TN)	Фалшиво положителни (FP)
	Измамна	Фалшиво отрицателни (FN)	Истински положителни (TP)

Фигура 2. Матрица на объркването

РЕАЛИЗАЦИЯ И РЕЗУЛТАТИ НА ДЪЛБОКАТА НЕВРОННА МРЕЖА ЗА ДЕТЕКЦИЯ НА ИЗМАМИ

Невронната мрежа, която разработихме за детекция на измами с кредитни карти, е проектирана с цел да идентифицира измамни транзакции, използвайки мощните възможности на дълбокото обучение. В тази точка ще разгледаме подробно как е реализирана невронната мрежа, както и резултатите, постигнати чрез нейното обучение и оценка.

АРХИТЕКТУРА НА МОДЕЛА

Мрежата е изградена с последователна (Sequential) архитектура, която е удобна за изграждане и експериментиране с модели в Python, използвайки библиотеката Keras, част от TensorFlow (фиг.3). Първоначалният входен слой приема данни с размерност, съответстваща на броя на характеристиките на транзакциите след предварителната обработка. След входния слой следват няколко пълносвързани слоя (Dense), като всеки от тях използва Rectified Linear Unit (ReLU) като активационна функция, която предоставя нелинейност и спомага за моделиране на сложни зависимости в данните. Последният слой е изходен и използва сигмоидална активационна функция, за да се получи вероятностна оценка за всяка транзакция – измамна или легитимна.

```
from tensorflow.keras import Sequential, layers, activations, initializers

dropout_rate = 0.3

# Define the model
model = Sequential(
    [
        layers.Dense(
            256,
            activation=activations.relu,
            input_shape=(X_train_scaled.shape[-1],),
        ),
        layers.Dense(256, activation=activations.relu),
        layers.Dropout(dropout_rate),
        layers.Dense(256, activation=activations.relu),
        layers.Dropout(dropout_rate),
        layers.Dense(1, activation=activations.sigmoid),
    ]
)

# Summarize the model
model.summary()
```

Layer (type)	Output Shape	Param #
dense_4 (Dense)	(None, 256)	7936
dense_5 (Dense)	(None, 256)	65792
dropout_2 (Dropout)	(None, 256)	0
dense_6 (Dense)	(None, 256)	65792
dropout_3 (Dropout)	(None, 256)	0
dense_7 (Dense)	(None, 1)	257

Model: "sequential_1"

=====
Total params: 139777 (546.00 KB)
Trainable params: 139777 (546.00 KB)
Non-trainable params: 0 (0.00 Byte)
=====

Фигура 3. Архитектура на модела на ДНМ

ПРЕДВАРИТЕЛНА ОБРАБОТКА НА ДАННИТЕ

Данните са предварително обработени. Направена е проверка за наличието на липсващи стойности с цел почистването им, но в случая се установи, че няма липсващи стойности. Направено е мащабиране чрез стандартно мащабиране (Standard Scaling) (фиг.4). Мащабирането е необходимо, тъй като различните характеристики могат да имат различни диапазони на стойности, което може да повлияе на производителността на модела. Стандартното мащабиране нормализира данните, като ги привежда към стандартно нормално разпределение, което улеснява обучението на модела.

```
#Standard Scaling

from sklearn.preprocessing import StandardScaler

# Initialize the scaler
scaler = StandardScaler()

# Fit and transform the scaler on training data
X_train_scaled = scaler.fit_transform(X_train)

# Transform the validation and test data using the same scaler
X_val_scaled = scaler.transform(X_val)
X_test_scaled = scaler.transform(X_test)
```

Фигура 4. Стандартно мащабиране на данните

ПРОЦЕС НА ОБУЧЕНИЕ НА МОДЕЛА

Моделът е обучаван чрез използване на оптимизатор Adam, който е широко признат за своята ефективност и стабилност при работа с големи и сложни модели (фиг.5). Функцията за загуба е бинарна крос-ентропия, която е подходяща за двоични класификационни задачи. Обучението на модела е осъществено с включване на баланс на класовете чрез изчисляване на класови тегла. Това е от съществено значение, тъй като данните за измами обикновено са силно небалансирани, с много повече легитимни транзакции отколкото измамни. Класовите тегла коригират тази диспропорция, като придават по-голяма тежест на измамните транзакции по време на обучението, гарантирайки, че моделът научава да разпознава и малкото на брой измами.

```
model.compile(
    optimizer=optimizers.Adam(1e-4),
    loss=losses.binary_crossentropy,
    metrics=metrics_,
)

# Train the model
history = model.fit(
    x=X_train_scaled,
    y=y_train,
    validation_data=(X_val_scaled, y_val),
    batch_size=2048,
    epochs=50,
    callbacks=callbacks_,
    class_weight=class_weights,
)
```

Фигура 5. Компилиране и обучение на модела

МЕТРИКИ ЗА ОЦЕНКА И РЕЗУЛТАТИ

Метриките за оценка, които използвахме, включват фалшиво отрицателни (FN), фалшиво положителни (FP), истински отрицателни, (TN) и истински положителни (TP), които формират основата на confusion matrix. Тази матрица ни позволява да визуализираме и анализираме представянето на модела по по-задълбочен начин. Допълнителните метрики, като Precision и Recall, предоставят допълнителни перспективи за точността и обхвата на детекцията на измами. Precision показва какъв процент от предсказаните измами са действително измамни, докато Recall, измерва каква част от общите измами моделът е успял да открие. Високият Precision е важен за минимизиране на фалшивите аларми, докато високият Recall е критичен за улавяне на всички потенциални измами.

За изчисляване на Precision и Recall при оценяването на модела с тестовите данни са използвани претеглени средни стойности. Това става в следните три стъпки:

1. Чувствителност (Recall)

- За всеки клас, изчисляваме Recall по следната формула:

$$\text{Recall} = \text{TP} / (\text{TP} + \text{FN})$$

- След това умножаваме Recall за всеки клас по броя на примерите в този клас и го сумираме за всички класове.
- Накрая, делим сумата на общия брой примери.

2. Точност (Precision)

- За всеки клас, изчисляваме Precision по следната формула:
- Precision = TP / (TP + FP)**
- След това умножаваме Precision за всеки клас по броя на примерите в този клас и го сумираме за всички класове.
- Накрая, делим сумата на общия брой примери.

3. Претеглени чувствителност (Recall) и точност (Precision)

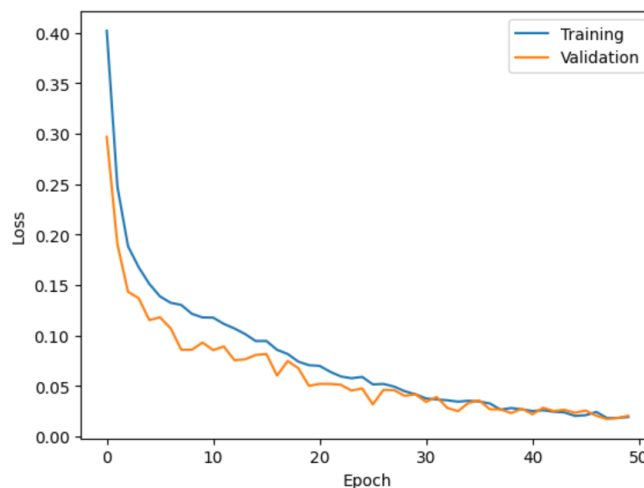
- Използваме следните формули:

$$\text{Weighted Recall} = \frac{\sum_{i=1}^N \text{Recall}_i \cdot \text{Примери}_i}{\sum_{i=1}^N \text{Примери}_i}$$

$$\text{Weighted Precision} = \frac{\sum_{i=1}^N \text{Precision}_i \cdot \text{Примери}_i}{\sum_{i=1}^N \text{Примери}_i}$$

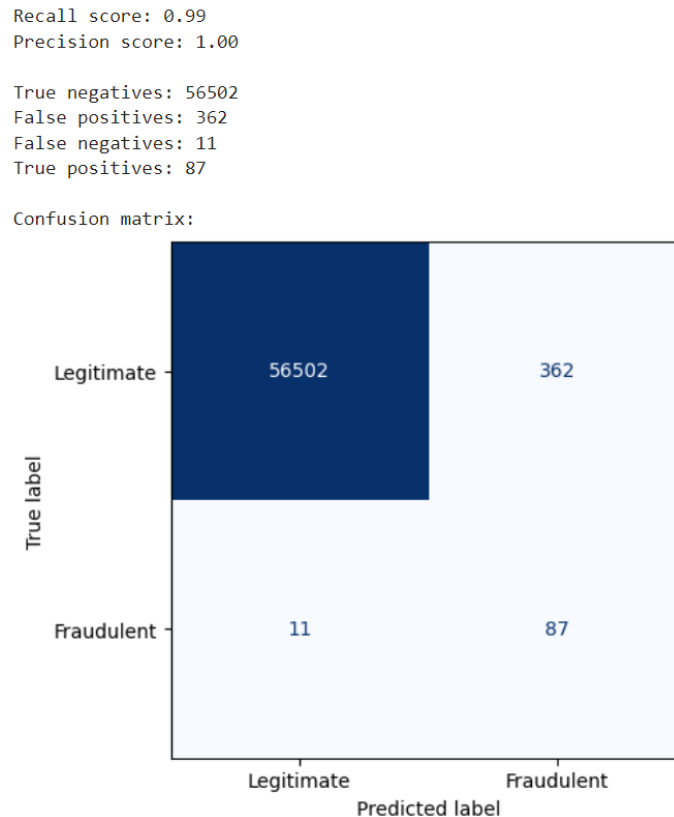
- Където
 - N е броят на класовете.
 - Recall_i и Precision_i са чувствителността и точността за клас i.
 - Примери_i е броят на примерите в клас i.

Моделът беше обучен в продължение на 50 епохи, като всяка епоха доведе до намаляване на функцията за загуба и подобряване на точността върху валидационните данни (фиг.6).



Фигура 6. Визуализация на процеса на обучение на модела

Преди обучението на модела данните бяха разделени на 80% за обучение и валидация и 20% за тестване. След приключване на обучението, моделът беше оценен върху тестовите данни, където постигна висока точност, комбинирайки добри стойности на Weighted Precision = 1,00 и Weighted Recall = 0,99, което индикира неговата ефективност в разпознаването на измамни транзакции (фиг. 7).



Фигура 7. Оценяване на модела върху тестови данни

ПРЕОДОЛЯВАНЕ НА ДИСБАЛАНСА В ДАННИТЕ

Едно от основните предизвикателства при детекция на измами е дисбалансът в данните. За да адресираме този проблем, използвахме балансиран класови тегла (фиг. 8). Това означава, че по време на обучението, моделът отдава по-голямо значение на измамните транзакции, които са по-малко на брой. Тази техника подобрява способността на модела да открива редките случаи на измами, без да се загуби точността при разпознаване на легитимни транзакции.

```

#Finding Class Weights
from sklearn.utils.class_weight import compute_class_weight
import numpy as np

# Get the unique classes
unique_classes = np.unique(y_train)

# Calculate class weights
class_weights_array = compute_class_weight(
    class_weight="balanced", classes=unique_classes, y=y_train
)

# Convert class weights to a dictionary for model training
class_weights = dict(zip(unique_classes, class_weights_array))
print(f"Class weights: {class_weights}")

```

Class weights: {0: 0.5009068624756796, 1: 276.1757575757576}

Фигура 8. Балансиране на теглата на класовете

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамките на разработването на модела за откриване на измами с кредитни карти чрез дълбока невронна мрежа, се оказва, че въвеждането на балансиран класови тегла допринася значително за повишаване на чувствителността (Recall) и точността (Precision) на модела. Благодарение на използването на техниката за изчисляване на класови тегла, моделът успява адекватно да се справи с проблема на дисбаланса в данните, където случаите на измами са значително по-редки в сравнение с легитимните транзакции. Този подход допринесе за обучението на модела да разпознава и минимизира броя на фалшивите отрицателни резултати (**измамни транзакции, които моделът не е успял да открие**), което е критично в контекста на финансовите измами.

Последователното обучение на модела в множество епохи с балансиран тегла показва впечатляващи резултати при тестове, като достигна високи стойности на метриците за оценка. Специално, моделът достигна **Weighted Precision = 1,00** и **Weighted Recall = 0,99** на тестовите данни, което подчертава неговата способност да идентифицира верни положителни (true positives) измамни транзакции, без значително увеличение на фалшивите положителни (false positives). Такива метрики подсилват доверието в модела, тъй като те демонстрират, че моделът ефективно балансира между откриването на измамни транзакции и поддържането на нисък брой неправилно класифицирани легитимни транзакции.

В заключение, разработеният модел демонстрира, че балансирането на теглата в невронните мрежи може значително да увеличи ефективността при обучение на модели за откриване на измами, особено в случаи на силно небалансирани данни. Такива подходи са от съществено значение за финансовата индустрия, където прецизността в детектирането на измама може да има значителни финансови последици.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

1. (20 01 2024 г.). Извлечено от www.kaggle.com: <https://www.kaggle.com/mlg-ulb/creditcardfraud/home>
2. Bhowmik, A., M. Sannigrahi, D. Chowdhury, A. D. Dwivedi and R. Rao Mukkamala. (2022). DBNex: Deep Belief Network and Explainable AI based Financial Fraud Detection. *2022 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*, Osaka, Japan, (стр. 3033-3042). doi:<https://ieeexplore.ieee.org/document/10020494>
3. Du, H., Lv, L., Guo, A., Wang, H. (2023). AutoEncoder and LightGBM for Credit Card Fraud Detection Problems. *Symmetry* 2023, 15, 870. doi:<https://doi.org/10.3390/sym15040870>
4. Jose, S., D. Devassy and A. M. Antony. (2023). Detection of Credit Card Fraud Using Resampling and Boosting Technique. *2023 Advanced Computing and Communication Technologies for High Performance Applications (ACCTHPA)*, Ernakulam, India, (стр. 1-8). doi:<https://ieeexplore.ieee.org/document/10083376>
5. Kaur, D., A. Saini and D. Gupta. (2022). Credit Card Fraud Detection Using Machine Learning, Deep Learning, and Ensemble of the both. *2022 Seventh International Conference on Parallel, Distributed and Grid Computing (PDGC)*, Solan, Himachal Pradesh, India, (стр. 484-489). doi:<https://ieeexplore.ieee.org/document/10053175>
6. Mizher, M. Z., A. B. Nassif. (20 July 2023). Deep CNN approach for Unbalanced Credit Card Fraud Detection Data. *2023 Advances in Science and Engineering Technology International Conferences (ASET)* (стр. 1-7). IEEE. doi:<https://ieeexplore.ieee.org/document/10180615>
7. Shahzad, I., A. Sajid, M. Anwar, N. Anwar. (2023, 06 28). Fraud Detection of Credit Cards Using Supervised Machine Learning Techniques. *Pakistan Journal of Emerging Science and Technologies (PJEST)*, 4(3), pp. 38-51. doi:<https://doi.org/10.58619/pjest.v4i3.114>

8. Shraddha, M., K. Sumedha, V.Veda Samhitha. (May-June 2023 r.). Credit Card Fraud Detection Using State-of-the-Art Machine Learning and Deep Learning Algorithms. *IJFMR Volume 5, Issue 3*. doi:<https://doi.org/10.36948/ijfmr.2023.v05i03.2926>

9. Yazna Sai, K., Venkata Bhavana, R., Sudha, N. (2023). Detection of Fraudulent Credit Card Transactions Using Deep Neural Network. Kumar, R., Verma, A.K., Sharma, T.K., Verma, O.P., Sharma, S. (eds) *Soft Computing: Theories and Applications. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 627. Springer, Singapore. doi:https://doi.org/10.1007/978-981-19-9858-4_16

ANALYSIS OF INSURANCE CLAIM RESERVES FOR MOTOR VEHICLES USING CLASSICAL CHAIN LADDER METHOD AND ROBUST CHAIN LADDER METHOD³

Petya Georgieva, Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: petqgeorgieva01@gmail.com

Chief Assist. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: Reserves are one of the most important components of insurance companies to ensure that they can fulfill their obligations. The chain-ladder method is widely used to calculate reserves. However, the chain ladder method is highly sensitive to outliers. The robust chain ladder method was used by setting the median as a development factor to remedy the effect of outliers. This study focuses on claim reservation using the classical chain-ladder method and robust chain-ladder method.

Key words: Insurance, Insurance Claim, Classical Chain Ladder, Robust Chain Ladder.

ВЪВЕДЕНИЕ

Всяка една застрахователна компания трябва да се подsigури, че ще може да изплати задълженията си при изплащане на вземанията на своите клиенти, както и своите собствени разходи. Поради това, определянето на резервите е един от основните компоненти за всеки застраховател.

Има няколко вида претенции за обезщетение, които пораждаат тези резерви:

- Искове, които са постъпили, но не са установени (Reported but not settled – RBNS);
- Искове, които са възникнали, но не са докладвани (Incurred but not reported – IBNR)
- Искове, чиито процес по установяване е завършен, но съществуват причини, поради които могат да бъдат отново разглеждани.

От тях най-голям риск за застрахователят носят IBNR. Един от най-използваните методи за изчисляване на резервите е Верижно-стълбовидният метод. Класическият верижно-стълбовиден метод е податлив на случайни изменения, тъй като се използва средна стойност като фактор на развитие. За да се преодолее това могат да се приложат по-устойчиви методи така че верижно-стълбовидният метод да бъде по-устойчив на отклонения. Устойчивият верижно стълбовиден метод е създаден за да се минимализира въздействието на отклоненията върху класическият верижно-стълбовиден метод.[1]

Класически верижно-стълбовиден метод

Данните за исковете, които са възникнали, но не са доказани са представени с т. нар. триъгълник на развитие. С X_{ij} са означени големината на исковете, възникнали в годината Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, но са били изплатени с j години закъснение, където $j = 0, 1, \dots, n-1$. В Таблица 1.

³ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31. 05. 2024 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: АНАЛИЗ НА ЗАСТРАХОВАТЕЛНИ РЕЗЕРВИ ЗА МОТОРНИ ПРЕВОЗНИ СРЕДСТВА ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕТО НА КЛАСИЧЕСКИЯ ВЕРИЖНО-СТЪЛБОВИДЕН МЕТОД И УСТОЙЧИВ ВЕРИЖНО СТЪЛБОВИДЕН МЕТОД.

се представя общия размер на регистрираните икове за годината. Сумата S_i , която е поискана от застрахователя, се изразява чрез сумата по редовете[2]:

$$S_i = \sum_{k=0}^{n-i} X_{ik}, i = 1, 2, \dots, n$$

Таблица 1. Триъгълник на развитие

Година на възникване	Година на развитие						
	Установени плащания	0	1	2	...	n-2	n-1
Y_1	S_1	X_{10}	X_{11}	X_{12}	...	$X_{1;n-2}$	$X_{1;n-1}$
Y_2	S_2	X_{20}	X_{21}			$X_{2;n-2}$	
Y_3	S_3	X_{30}	X_{31}		...		
...	...	...	...	...			
Y_{n-1}	S_{n-1}	$X_{n-1;0}$	$X_{n-1;1}$				
Y_n	S_{n-2}	X_{n0}					

Общата стойност на изплатените за календарната година икове се представят като сума от диагоналните клетки от последните n стълбове от Таблица 1,

$$\hat{S}_i = \sum_{k=0}^{i-1} X_{i-k,k}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Следва да се изчислят факторите на развитие, наричани още оценки на кумулативните загуби от неуредени щети. За пресмятането им се разглежда Таблица 2, която съдържа кумулативните стойности на триъгълника на развитие където CS_{ij} представлява натрупаната стойност от икове, които са възникнали през Y_i -тата година, но са изплатени най-много с j години закъснение.[2]

Таблица 2. Кумулативни стойности на триъгълника на развитие

Година на възникване	Година на развитие					
	0	1	2	...	n-2	n-1
Y_1	CS_{10}	CS_{11}	CS_{12}	...	$CS_{1;n-2}$	$\widehat{CS}_{1;n-1}$
Y_2	CS_{20}	CS_{21}			$CS_{2;n-2}$	$\widehat{CS}_{2;n-2}$
Y_3	CS_{30}	CS_{31}		...		
...	...	...	...			
Y_{n-1}	$CS_{n-1;0}$	$CS_{n-1;1}$				
Y_n	CS_{n0}	$\widehat{CS}_{n1}$				$\widehat{CS}_{n;n-1}$
Фактори на развитие	-	f_1	f_2			f_{n-1}

$$CS_{ik} = \sum_{j=0}^k X_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n-1; i+k \leq n$$

Факторите на определяне на възникналите загуби се пресмятат като съотношение на очакваните кумулативни стойности на щетите, които ще се изплащат със съответното закъснение. Те носят информация за нарастването на очакваната сума, която трябва да се задели за уреждането на иковете с k години закъснение. Ако означим очакваната стойност

на кумулативните загуби по исковете за i -тата година на възникване с k -тата година на изплащане с [2]

$$E\{CS_k^i\} = \frac{\sum_{j=1}^i CS_{jk}}{i}, i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n-1; i+k \leq n$$

Като оценките за кумулативните загуби се пресмятат като отношение на тези очаквания за два съседни периода

$$f_k = \frac{E\{CS_k^{n-k}\}}{E\{CS_{k-1}^{n-k}\}} = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} CS_{j,k}}{\sum_{j=1}^{n-k} CS_{j,k-1}}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

Очакваните бъдещи загуби се изчисляват по следната формула[2]

$$\widehat{CS} = CS_{ik-1} * f_k, i = 2, 3, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n-1; n < i+k \leq 2n-1$$

Таблица 3. Оценка на очакваните стойности

Година на развитие						
Година на възникване	0	1	2	...	n-2	n-1
Y_1	X_{10}	X_{11}	X_{12}	...	$X_{1,n-2}$	$\hat{X}_{1,n-1}$
Y_2	X_{20}	X_{21}			$X_{2,n-2}$	$\hat{X}_{2,n-1}$
Y_3	X_{30}	X_{31}		...		
...	...	...	...			
Y_{n-1}	$X_{n-1;0}$	$X_{n-1;1}$				
Y_n	X_{n0}	$\hat{X}_{n0}$				$\hat{X}_{n,n-1}$

Прилагайки обратни преобразувания се преминава отново към оценки на исковете от Таблица 1 в Таблица 3 се включват стойностите под гравния диагонал, където $\hat{X}_{ij}$ са оценените стойности:

$$\hat{X}_{ij} = \widehat{CS}_{ij} - \widehat{CS}_{i,j-1}, i = 2, 3, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n-1; n < i+k \leq 2n-1$$

Сумата по диагоналите на Таблица 3 представя оценките за очакваните стойности, които ще трябва да бъдат изплатени за възникнали предходни периоди щети. Те са разпределени за периода от следващите n години. [2]

$$Z_{Y_{n+i}} = \sum_{j=0}^{n-i-1} \hat{X}_{n-j;i+j}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

Устойчив верижно-стълбовиден метод

С този метод факторите на развитие се изчисляват с използването на медиана, тъй като тя не е афектирана от случайните изменения. [3]

$$\tilde{f}_i = median \left\{ \frac{X_{ij}}{X_{i,j-1}} \mid i = 1, 2, \dots, n-j+1 \right\}, 2 \leq j \leq n$$

Причината, поради която се използва медианата, е че тя е по-малко податлива на случайни изменения от средната стойност, тъй като повечето такива стойности се намират или в началото, или в края на набора от данни, докато медианата приема стойности в средата на данните. След като намерим факторите на развитие се попълва кумулативния триъгълник от Таблица 2.

Числени експерименти

Разгледани данни за застраховка „Гражданска отговорност“ за периода 2000-2023г. за последните 10 години на изплатените претенции, като данните са взети от Комисията по финансов надзор.[4]

Разгледани са 14 триъгълника на развитие и са пресметнати факторите на развитие по двата метода.

Таблица 4. Изчислени фактори на развитие по верижно-стълбовидния метод и устойчивия верижно-стълбовиден метод

Период		година на прелявяване на претенцията								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000 -	CLM	1,444307246	1,065241949	1,021176607	1,009627166	1,006932995	1,001095879	1,00122094	1,001031699	1
2010	RCLM	1,396249821	1,052223522	1,020758338	1,009455185	1,006932995	1,000755000	1,00006218	1,000123407	1,000000000
2001 -	CLM	1,435962954	1,06130242	1,020935111	1,010553571	1,007599219	1,000903064	1,0004318	1,001160105	1
2011	RCLM	1,413370704	1,052085575	1,022113540	1,010524255	1,007599219	1,000554261	1,00028298	1,000911291	1,000000000
2002 -	CLM	1,410887259	1,058088797	1,02078214	1,012131843	1,007953835	1,000961313	1,00052873	1,001093053	1
2012	RCLM	1,412974990	1,052085575	1,022518345	1,010524255	1,007953835	1,000532912	1,00044729	1,000980848	1,000000000
2003 -	CLM	1,405940469	1,055388191	1,019249992	1,011523781	1,009058825	1,001563399	1,00071949	1,001378889	1,000086909
2013	RCLM	1,412974990	1,047588226	1,020601640	1,010364278	1,009058825	1,001371670	1,00085023	1,000980848	1,000073720
2004 -	CLM	1,453044883	1,071429483	1,024876934	1,018922849	1,013470106	1,003876846	0,99675915	1,000000356	0,999178883
2014	RCLM	1,487039337	1,092681791	1,025029928	1,017381186	1,013470106	1,001758863	0,99954969	0,999380862	0,999180851
2005 -	CLM	1,453018033	1,063105046	1,022364591	1,016584585	1,011705158	1,003801343	1,00269495	1,001425172	0,997197775
2015	RCLM	1,453018033	1,063105046	1,022364591	1,016584585	1,011705158	1,003801343	1,00269495	1,001425172	0,997197775
2006 -	CLM	1,48650764	1,067105592	1,023471025	1,019348456	1,015276979	1,005064669	1,00052686	1,000693666	0,998590632
2016	RCLM	1,468882270	1,061965269	1,022264159	1,018265226	1,015276979	1,004816268	1,00263140	1,001420589	0,998685833
2007 -	CLM	1,455900438	1,072971848	1,032266866	1,019956723	1,015619294	1,008629997	0,99985626	0,999670171	0,999259784
2017	RCLM	1,448484586	1,072728137	1,031889986	1,020649535	1,015619294	1,009104027	1,00173053	0,998486646	0,999081563
2008 -	CLM	1,469500869	1,085354625	1,046408887	1,025676749	1,016382546	1,008866138	1,00025545	1,000320996	1,0003742
2018	RCLM	1,448484586	1,072366415	1,034918903	1,025239947	1,016382546	1,010102782	1,00257949	0,998485888	1,000385384
2009 -	CLM	1,48373255	1,095920362	1,049323483	1,030784585	1,01638655	1,00997877	1,00013385	1,001485375	0,999982294
2019	RCLM	1,461240255	1,074228601	1,041797349	1,027898731	1,016386550	1,010628107	1,00198244	1,001857503	0,999988045
2010 -	CLM	1,492515431	1,103252949	1,052467587	1,032535928	1,01926298	1,007446434	1,00478009	1,008126918	1,014789319
2020	RCLM	1,468384762	1,099976868	1,054316584	1,032585484	1,019262980	1,010059699	1,00369668	1,003988264	1,014958976
2011 -	CLM	1,495146793	1,105021646	1,050717542	1,036171523	1,018334816	1,008608059	1,01004569	1,009404688	1,014688867
2021	RCLM	1,468375103	1,099987373	1,050070176	1,034026483	1,018334816	1,010059699	1,00644993	1,008009188	1,015200398
2012 -	CLM	1,488045796	1,103562008	1,050675111	1,035965638	1,019006794	1,008763544	1,01447074	1,013614873	1,003361611
2022	RCLM	1,466588322	1,099987373	1,050085328	1,034051082	1,021259952	1,009545579	1,01418600	1,011960554	1,006026415
2013 -	CLM	1,486414466	1,102500437	1,05034504	1,03557782	1,021259952	1,008853543	1,01504968	1,011789101	1,006012442

Направена е проверка за наличието на случайни изменения като са пресметнати Пирсъновите остатъци и са установени случайни изменения в периодите 2008 – 2012. Направени са модификации на съответните стойности по формулата

$$C_{k,i} = \frac{X_{k,2}}{\text{median} \left\{ \frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}} \mid 1 = 1, \dots, n - j + 1 \right\}, 2 \leq j \leq n}$$

Получените резултати са представени в Таблица 4 като в бяло са резултатите от класическия верижно-стълбовиден метод, а в синьо по устойчивия верижно-стълбовиден метод.

В Таблица 5 са представени оценките по класическия Верижно-стълбовиден метод.

Таблица 5. Очаквани стойности по Верижно-стълбовиден метод

Период	Очаквани стойности
2000 - 2010	37 872 578
2001 – 2011	51 892 246
2002 – 2012	52 100 614
2003 – 2013	48 898 696
2004 – 2014	60 878 950
2005 – 2015	62 487 209
2006 – 2016	78 904 072

2007 – 2017	70 391 985
2008 – 2018	87 115 749
2009 – 2019	101 574 078
2010 – 2020	103 684 538
2011 – 2021	114 379 026
2012 – 2022	116 474 997
2013 - 2023	125 685 716

След това са пресметнати очакваните стойности като са използвани устойчивия верижно-стълбовиден метод. След пресмятане получените резултати са представени в Таблица 6.

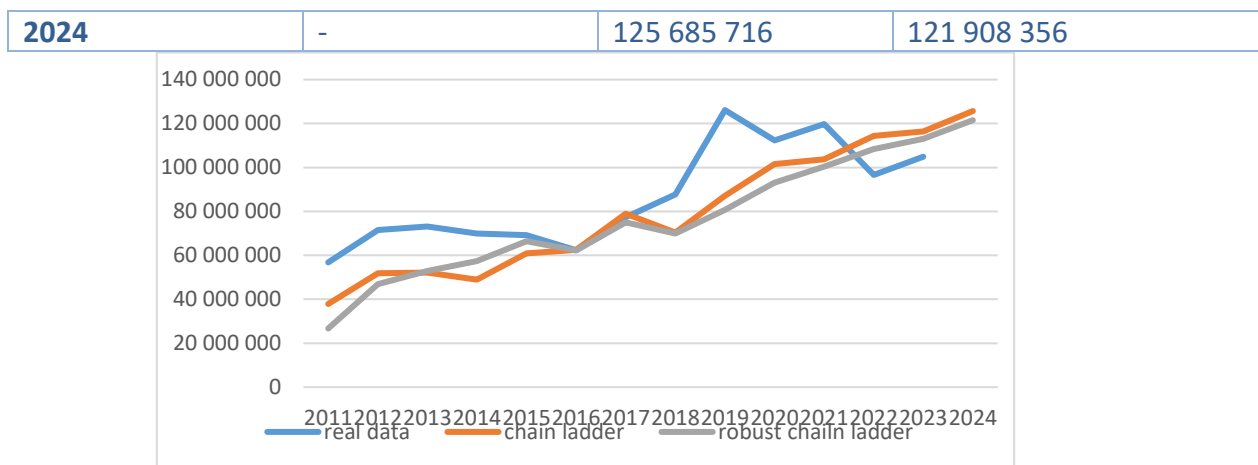
Таблица 6. Очаквани стойности по Устойчив верижно-стълбовиден метод

Период	Очаквани стойности
2000 - 2010	26 706 303
2001 – 2011	46 935 616
2002 – 2012	52 865 592
2003 – 2013	57 372 290
2004 – 2014	66 395 029
2005 – 2015	62 174 417
2006 – 2016	75 011 120
2007 – 2017	69 951 042
2008 – 2018	80 650 100
2009 – 2019	93 038 505
2010 – 2020	100 395 362
2011 – 2021	108 761 429
2012 – 2022	113 059 464
2013 - 2023	121 908 356

В Таблица 7 са представени резултатите от прогнозните изчисления и за двата метода, както и реалните данни.

Таблица 7. Представяне на реалните данни и прогнозите по двата метода

Период	Реални данни	Chain method	Ladder	Robust method	chain	ladder
2011	43 093 028	37 872 578		26 706 303		
2012	43 653 949	51 892 246		46 935 616		
2013	42 568 957	52 100 614		52 865 592		
2014	69 133 517	48 898 696		57 372 290		
2015	62 409 786	60 878 950		66 395 029		
2016	77 383 394	62 487 209		62 174 417		
2017	87 696 151	78 904 072		75 011 120		
2018	126 126 413	70 391 985		69 951 042		
2019	112 390 102	87 115 749		80 650 100		
2020	118 491 716	101 574 078		93 038 505		
2021	95 409 112	103 684 538		100 395 362		
2022	96 633 152	114 379 026		108 761 429		
2023	104 903 144	116 474 997		113 059 464		



Фигура 1. Графика на прогнозите по верижно-стълбовидният метод и устойчивият верижно-стълбовиден метод и реалните данни

Направени са оценки на грешките, като са пресметнати средноквадратичната и средната абсолютна процентна грешка, които могат да се използват за сравняване с друг метод за прогнозиране към същите данни. От получените резултати в Таблица 8 се вижда, че устойчивият метод дава по-големи грешки.

Таблица 8. Оценки на грешките

	Верижно-стълбовиден метод	Устойчив верижно-стълбовиден метод
RMSE	65 904 793	73 691 393
MAPE	13,37%	16,17%

На фигура 1 са представени графично резултатите от двата метода, както и реализираните стойности. От графиката се вижда, че и двата модела се движат около реалните данни, но и двата метода не успяват да хванат големите отклонения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В това изследване се определя размера на застрахователните резерви, чрез използването верижно-стълбовидния метод. Използвани са 14 триъгълника на развитие, пресметнати са факторите на развитие, направена е проверка за outliers, извършено е прогнозите по двата метода, направени са оценки на грешките и са сравнени резултатите като са използвани данни от Комисията по финансов надзор за периода 2000 – 2023 година.

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024 – ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] D. Suwardi, Y. Rurwono, The Analysis of Motor Vehicle Insurance Claum Reserve Using Robust Chain Ladder, 2020
- [2] Raeva E., V. Pavlov, (2017), Planning Outstanding Reserves in General Insurance, AIP Conference Proceedings 1895 (1), 050009.
- [3] T. Verdonck, M. Van Wouwe, and J. Dhaene, “A robustification of the chain-ladder method,” North Am. Actuar. J., 2009.
- [4] <https://www.fsc.bg/zastrahovatelna-deynost/statistika/obshto-zastrahovane/2022-2/>

ANALYSIS OF CRITERIA FOR ARIMA MODEL SELECTION⁴

Preslav Karanedef, Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: karanedef@gmail.com

Chief Assist. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: The aim of this paper is to establish the relationship between various information criteria and several error evaluation metrics. To achieve this, we gathered several time-series datasets, with diverse characteristics, and built several ARIMA models on them, using the 'pmdarima' python module's auto-modeller (based on R's 'auto.arima'). In addition to the automatically generated models, we also constructed several hand-picked models. For each model, we computed the relevant information criteria and error evaluation metrics, and subsequently analyzed their covariance matrix.

Key words: ARIMA, AIC, AICC, BIC, HQIC, R^2 , MAE, RMSE, MAPE, MPE, LLF, CV.

ВЪВЕДЕНИЕ

ARIMA методите са най-общия, клас модели за прогнозиране на времеви редове, които могат да бъдат направени „стационарни“, чрез диференциране, и в комбинация с нелинейни трансформации като логаритмуване, или дефлация. Случайна променлива, която е времеви ред, е стационарна, ако статистическите й свойства са постоянни във времето. Стационарен ред е ред, който няма тренд, отклоненията около средната стойност на който, имат постоянна амплитуда, и редът се колебае по един и същ начин, или краткотрайните произволни времеви изменения изглеждат по еднакъв начин от статистическа гледна точка. [1]

Настоящата статия има за цел да установи връзка между основни компоненти на времевите редове и някои критерии за оценка на времевите редове. Разгледани са данни на 5 финансови инструмента - акциите на Microsoft (MSFT), IBM, борсово търгувания фонд SPY, който следва индекса S&P500, курса на крипто-валутите OIN Finance (OIN-USD), и Cardano (ADA-USD). Данните са взети от сайт finance.yahoo.com. Проведен е аналогичен анализ за данни на 5 времеви реда, взети от модул на python – `pmdarima.datasets` – `airpassengers`, съдържащ месечни данни за пътниците на интернационалните полети между 1949-1960 [2], `ausbeer`, с тримесечни данни за производството на бира в Австралия между 1956:Q1-2008:Q3 [3], `austres` с тримесечни данни за населението на Австралийски жители между 03.1971-03.1994 [4], `wineind` с месечни данни за продажбите на винопроизводителите на Австралия между 01.1980-08.1994 [5], и `woolynq` с тримесечни данни за производство на вълнена прежда в Австралия между 03.1965-09.1994 [6]. Избрани са по 4 различни SARIMA модела за всеки времеви ред. Анализът включва пресмятането на четири информационни критерия AIC, BIC, AICC, HQIC, заедно с R^2 и 3 оценки на грешките – MAPE, MAD (MAE), RMSE. Включен е и коефициента на вариация - $CV = \frac{\sigma}{\mu}$. Построена е корелационна матрица, която показва зависимостите между информационните критерии и оценките на грешките, получени при различните модели.

⁴ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31. 05. 2024 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: АНАЛИЗ НА КРИТЕРИИ ЗА ИЗБОР НА ПОДХОДЯЩ ARIMA МОДЕЛ.

За даден вероятностен модел $f(x, \vec{\theta})$ и параметрично пространство Θ , дефинираме функция на правдоподобие $L(\theta) = f(X_1, \dots, X_n; \vec{\theta})$, и логаритмичната функция на правдоподобие $\ell(\vec{\theta}) = \ln[L(\vec{\theta})]$. Съгласно принципът на максимално правдоподобие, при дадена случайна извадка $X_1, \dots, X_n$ и параметричен модел $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$, се избира приближение на θ , например $\vec{\theta}(\vec{X})$, със стойността $\theta \in \Theta$, такава че да максимизира функцията на правдоподобие. [7]

Информационния критерий на Акаике (AIC), се стреми да приближи загубите в прогнозата, използвайки сумата от загубите на извадката, и корективен член. Стандартната процедура е да се избере модел с най-нисък AIC. [8] При означения $\hat{\ell}$ за максимизираната логаритмична функция на правдоподобие, и k за степените на свобода:

$$AIC = -2\hat{\ell} + 2k$$

Когато размерът на извадката е малък, има значителна вероятност AIC да избира модели с твърде много параметри, или иначе казано, AIC ще преобучава [9]. Ако с n означаваме броя наблюдения, то:

$$AICc = AIC + \frac{2k^2 + 2k}{n - k - 1} \quad (1)$$

Така, AICc е AIC с допълнителен наказателен член за броя на параметрите. От уравнение (1) може да се види, че при $n \rightarrow \infty$ AICc се приближава до AIC [9]. След опростяване на израза се стига до (2), което е формулата, която се пресмята от алгоритмите на statsmodels [10]:

$$AICc = -2\hat{\ell} + \frac{2kn}{n - k - 1} \quad (2)$$

BIC (Bayesian information criterion), или SIC (Schwartz information criterion, също SBC, SBIC) е близко свързан с AIC. При обучението на модела е възможно да се увеличи правдоподобността чрез добавяне на параметри, но това може да доведе до преобучение. И двата критерия опитват да решат този проблем с наказателен член за броя на параметри на модела, като този на BIC е по-голям [11].

$$BIC = -2\hat{\ell} + k \ln(n)$$

HQIC (Hannan-Quinn information criterion) е алтернатива на AIC и BIC [12]. Според [13], този критерий, макар и често цитиран, рядко се използва на практика. Също отбелязват, че за разлика от AIC, не е оценка за Kullback-Leibler разходимост. [12]

$$HQIC = -2\hat{\ell} + 2k \ln(\ln(n))$$

Коефициентът на детерминация R^2 е пропорцията от вариацията на зависимата променлива, която е обяснима от независимата променлива. Ако μ е средата на наблюдаваните данни, y_i е елемент от наблюдаваните данни, а f_i е прогнозна стойност от обученния модел, тогава $e_i = y_i - f_i$ е остатък, и имаме [14]:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$RSS = \sum_i (y_i - f_i)^2 = \sum_i e_i^2$$

$$TSS = \sum_i (y_i - \mu)^2$$

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

В най-добрия случай, данните от модела съвпадат с наблюдаваните, което води до $RSS = 0$ и $R^2 = 1$, докато модел, който прогнозира μ ще има $R^2 = 0$. Модели с по-лоши прогнози ще имат отрицателен коефициент на детерминация. [14]

Средна абсолютна грешка (MAE) се смята като сумата от абсолютни грешки, или Манхатаново разстояние, разделено на размера на извадката [15]:

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |f_i - y_i|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |e_i|}{n}$$

Средната абсолютна грешка в проценти (MAPE) се смята така [16]:

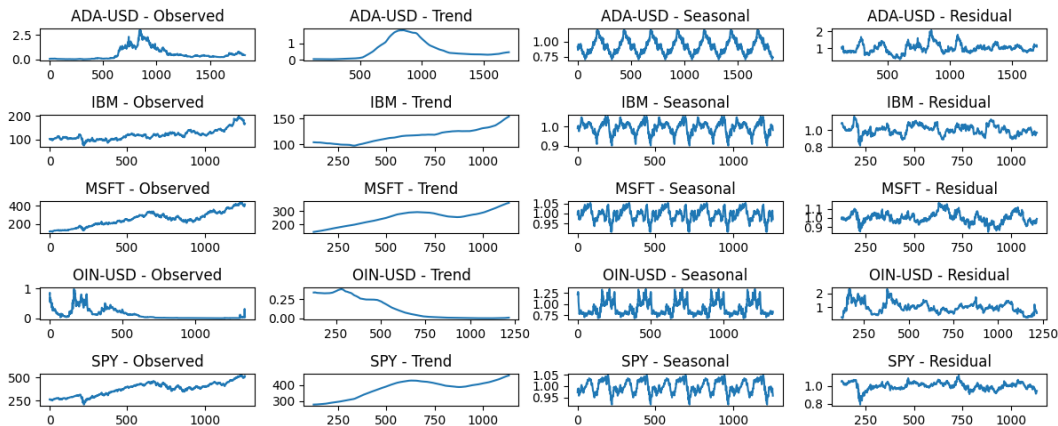
$$MAPE = 100 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - f_t|}{y_t}$$

Средноквадратичното отклоние се отбелязва с RMSE, и се смята [17]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - f_i)^2}$$

ИЗЛОЖЕНИЕ

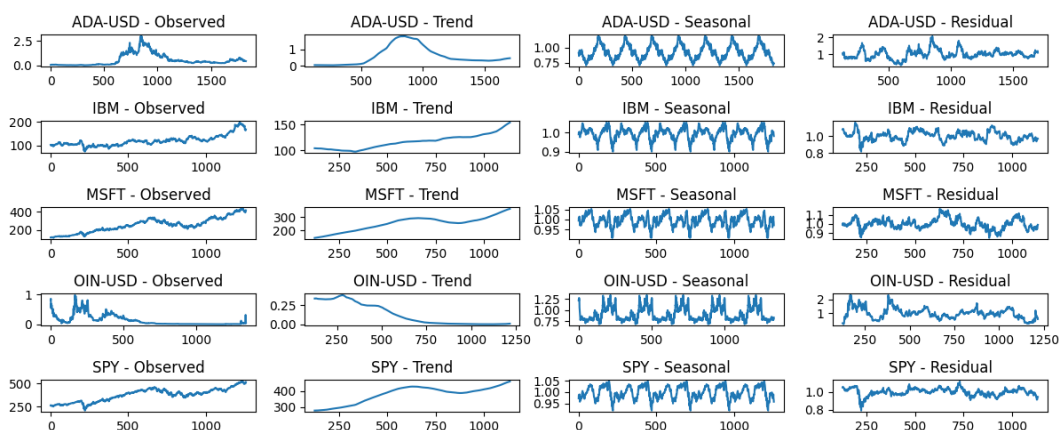
Започнахме със събирането на колекция от финансови данни, по 2-3 от категория, където трябва да има такива с голяма дисперсия, с малка дисперсия, със сезонност, и без сезонност, с тренд, и без тренд. Беше използван коефициент на вариация, за да се определи кои редове са с голяма, и кои с малка дисперсия, като стойности над 1 за коефициента се приемат за големи. Бяха избрани 5 реда за начало, представени в Таблица 1 и



Фигура 1

Таблица 1. Статистики на избраните редове

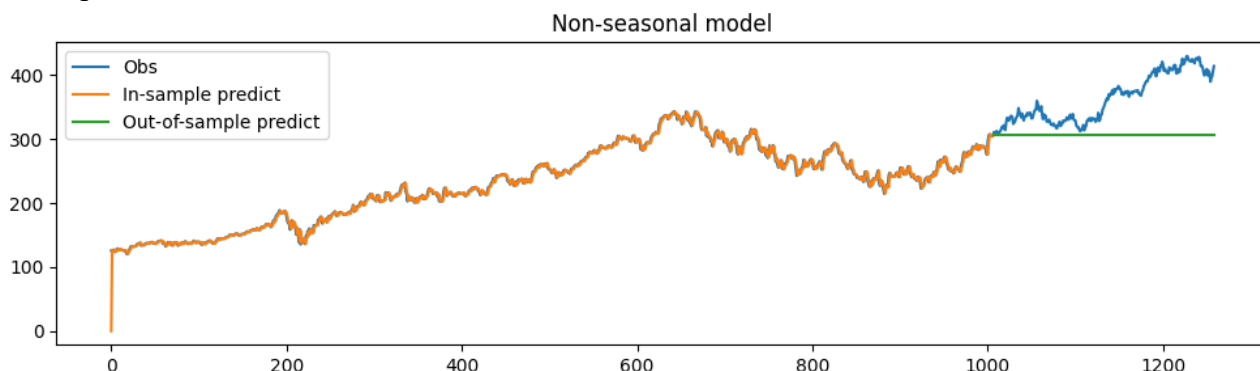
name	mean	std	cv
OIN-USD	0,13	0,18	1,33
ADA-USD	0,56	0,60	1,07
MSFT	251,90	77,71	0,31
IBM	120,45	22,41	0,19
SPY	376,99	69,41	0,18



Фигура 1. Графики на избраните редове, включително и декомпозицията им

За всеки ред са сметнати средна стойност, стандартно отклонение и коефициент на вариация. Направени са и графики на декомпозициите, използвайки период на сезонност от 250, съответстващ на 1 година в бизнес дни.

За първи модел са взети акциите на Microsoft (MSFT). Данните се разделят на дял за обучение (train) и дял за тестване (test), в съотношение 4:1 (20% от данните се заделят за тестване). Установено е, че `auto_arma` от `pmдарима`, което е базирано на същия алгоритъм използван в `auto.arma` на R, не се справя с дълги периоди на сезонност (не му стига паметта). Препоръчва се употребата `Fourier Featurizer` за дълги, и/или сложни сезонности [18], но това се явява като значително отклонение от целта на тази работа, и ще бъде оставено за следващо проучаване. Като компромисен вариант се пуска и модел със сезонност от 5 (1 седмица в бизнес дни), който връща същия модел като несезонния - $ARIMA(0,1,1)$, чийто резултати не са добри.



Фигура 2. Прогноза на `auto_arma` без сезонност - $ARIMA(0,1,1)$

Таблица 2. Оценки на грешки и информационни критерии на MSFT

error metric	train	test	train2
MAE	3,350982405	57,24730075	No. Observations: 1007
MSE	35,8581861	4655,886126	Log Likelihood -2940.125
MAPE	0,015179836	0,149180977	AIC 5884.250
RMSE	5,988170514	68,234054	BIC 5894.077
R ²	0,989451074	-2,377176665	HQIC 5887.984

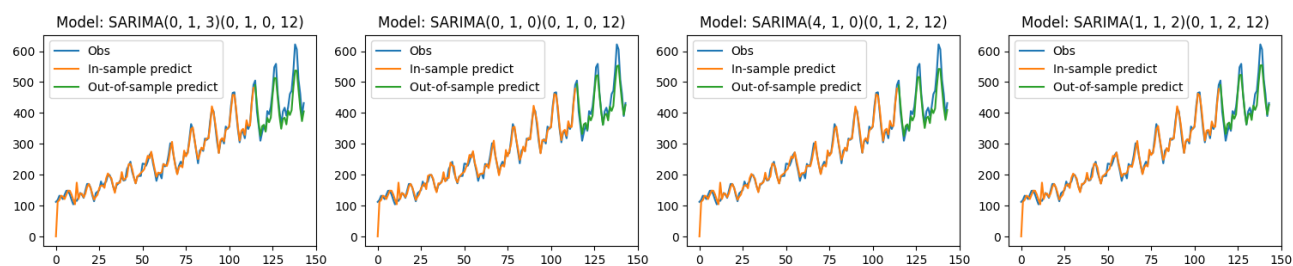
Както се вижда от **Фигура 2**, прогнозата е лоша. За пълнота, в **Фигура 2**. Прогноза на `auto_arma` без сезонност - $ARIMA(0,1,1)$

Таблица 2 се показват и оценките на грешките и информационните критерии на модела.

За да се избегне смяната на целта на работата, се вземат времевите редове от примерните данни включени в `pmдарима.datasets`, за част от които автоматичното моделиране

върща добри резултати. Започва се с airpassengers [2]. Освен изчисления от auto_arima са избрани още 3 модела. На **Фигура 3** са представени графиките от прогнозите на моделите, а на **Фигура 3**. Графики на 4 модела подредени по растящ AIC

Таблица 3 са представени информационните критерии и оценките за грешка, като оценките са сметнати веднъж за тренировъчните данни, и веднъж за тестовите.



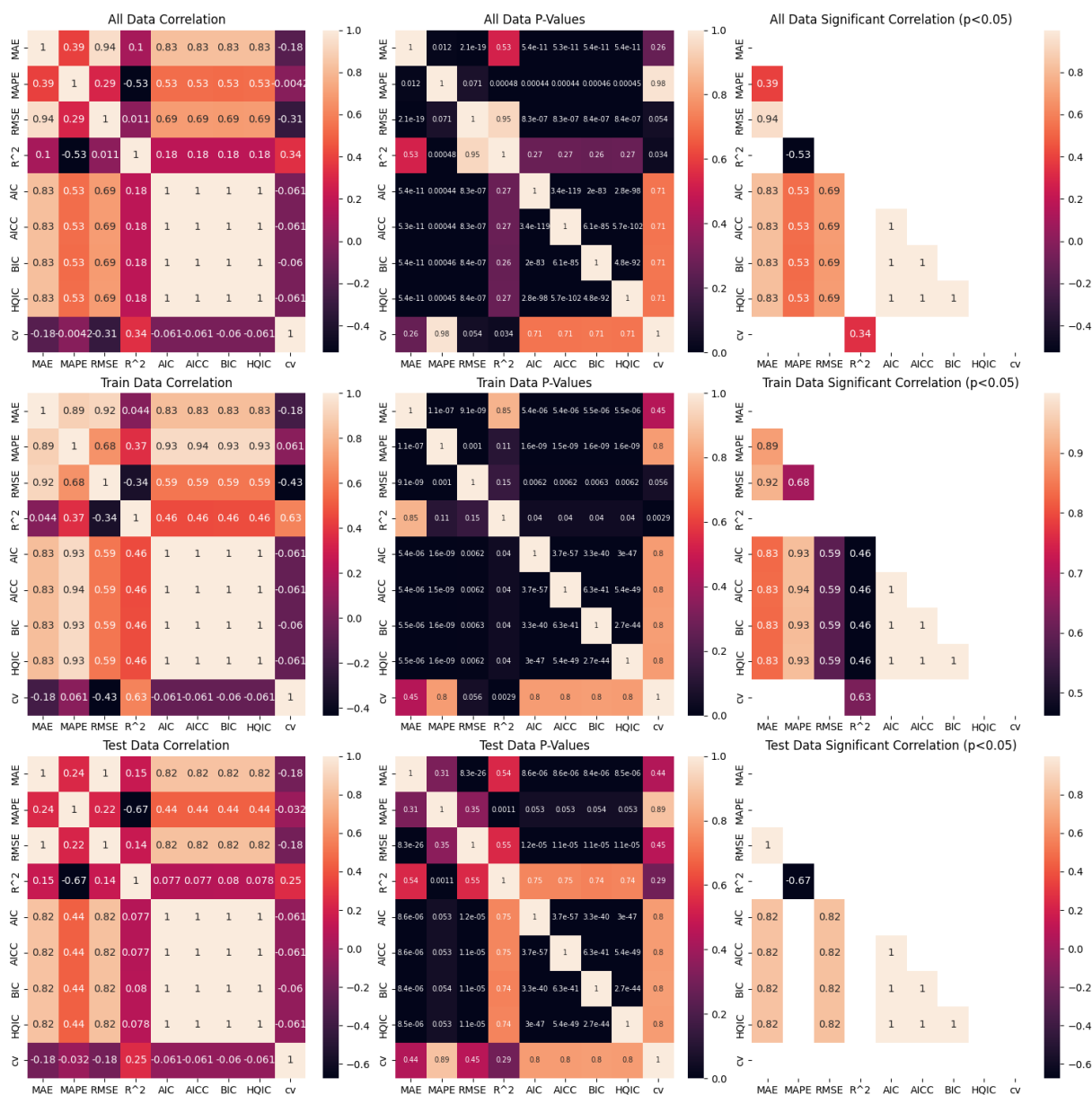
Фигура 3. Графики на 4 модела подредени по растящ AIC

Таблица 3. Информационни критерии и оценки на грешките на airpassengers

	model	MAE	MAPE	RMSE	R ²	LLF	AIC	AICC	BIC	HQIC
test	(0, 1, 3)(0, 1, 0, 12)	29,95	6,43%	36,40	0,78	-372,43	754,87	755,42	767,99	760,18
test	(0, 1, 0)(0, 1, 0, 12)	21,60	4,66%	27,91	0,87	-377,89	759,77	759,88	765,02	761,90
test	(4, 1, 0)(0, 1, 2, 12)	26,59	5,69%	32,96	0,82	-372,08	760,17	761,52	781,17	768,67
test	(1, 1, 2)(0, 1, 2, 12)	20,39	4,41%	26,46	0,89	-373,78	761,57	762,61	779,94	769,01
train	(0, 1, 3)(0, 1, 0, 12)	9,20	4,95%	15,15	0,97	-372,43	754,87	755,42	767,99	760,18
train	(0, 1, 0)(0, 1, 0, 12)	9,63	5,13%	15,44	0,97	-377,89	759,77	759,88	765,02	761,90
train	(4, 1, 0)(0, 1, 2, 12)	9,13	4,89%	15,13	0,97	-372,08	760,17	761,52	781,17	768,67
train	(1, 1, 2)(0, 1, 2, 12)	9,21	4,93%	15,21	0,97	-373,78	761,57	762,61	779,94	769,01

В червено в **Фигура 3.** Графики на 4 модела подредени по растящ AIC

Таблица 3 са отбелязани най-лошите стойности за съответния показател, а в зелено, най-добрите. Прави впечатление, че модела с най-висок AIC има най-ниски оценки на грешките, когато се изчисляват за тестовите данни, а модела с най-нисък има най-лоши. При обучителните данни също се вижда, че най-ниският AIC не съвпада с най-добрите показатели за грешка.



Фигура 4. Корелационни матрици на информационни критерии и оценки на грешка с $p < 0.05$

Таблица 4. Статистики на времевите редове от pmdarima.datasets

name	mean	std	cv
airpassengers	280,30	119,97	0,43
ausbeer	414,95	86,96	0,21
austres	15 273,45	1 356,81	0,09
wineind	25 392,15	5 340,82	0,21
woolryrnq	5 658,23	1 040,75	0,18

Същата процедура е повторена за останалите данни достъпни в `pmдарима.datasets`, от които получаваме адекватни модели за общо 5 от тях: `air_passenger`, `ausbeer`, `austres`, `wineind`, `woolynq`. Сметнати са информационни критерии и оценки на грешките, подобно на **Фигура 3**. Графики на 4 модела подредени по растящ AIC

Таблица 3. Информационни критерии и оценки на грешките на *airpassengers*, с добавен и коефициента на вариация и пресметната корелационна матрица, представена в 3 варианта, за 3 групирания на данните във **Фигура 4**. Стойностите на коефициента на корелация, показани на фигура 4 са пресметнати с корелационния коефициент на Пирсън за трите вида пресмятания на данните – *train*, *test* и общо за двете. С различни цветове са оцветени различните степени на стойностите на зависимост по показана скала. На фигурата са показани и резултатите от тест за значимост на коефициентите. В първа колона е пълната корелационна матрица, във втората е матрицата от съответстващите значимости, а в 3-тата са корелациите, чиято значимост е по-малка от 0.05. Не се разглежда LLF, тъй като тя е компонент на информационните критерии.

Обект на изследване са зависимостите между оценката на грешките и информационните критерии. Забелязва се, че за *train data* най-силна зависимост има между MAPE и информационните критерии (0.93-0.94), т.е. с намаляване на стойността на MAPE, намаляват и стойностите на информационните критерии. При *test data* се забелязва точно обратното – корелацията между MAPE и информационните критерии се оказва незначима, докато MAE и RMSE имат висока стойност на коефициента на корелация. За *all data* се наблюдава значима корелация и за трите вида пресмятания на грешките, като най-висока стойност се регистрира при MAE 0.83.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В настоящата работа са направени опити за моделиране на финансови данни, чрез *auto_arima*.
- Установено е емпирично, че данни със сложна или дълга сезонност, не дават добри прогнози при несезонни модели. Показано е, че опити за сезонни модели са неуспешни, когато сезонността е дълга или сложна.
- Установено е, че по-добрите информационни критерии не гарантират най-ниски показатели за грешка, нито при тестови данни, нито при тренировъчни.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024-ФПНО – 02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] R. Nau, "ARIMA models for time series forecasting," Duke University, 2020. [Online]. Available: <https://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm#arima010>. [Accessed 04 2024].
- [2] G. E. P. Box, G. M. Jenkins and G. C. Reinsel, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Third Edition, Holden-Day. Series G., 1976.
- [3] "ausbeer: Quarterly Australian Beer production," [Online]. Available: <https://www.rdocumentation.org/packages/fpp/versions/0.5/topics/ausbeer>.
- [4] P. Brockwell and R. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, 1996.
- [5] "wineind: Australian total wine sales," [Online]. Available: <https://www.rdocumentation.org/packages/forecast/versions/8.1/topics/wineind>.
- [6] "woolynrq: Quarterly production of woollen yarn in Australia," [Online]. Available: <https://www.rdocumentation.org/packages/forecast/versions/8.1/topics/woolynrq>.
- [7] R. J. Rossi, in *Mathematical Statistics: An Introduction of Likelihood Based Inference*, John Wiley & Sons, 2018, pp. 231-234.
- [8] J. Ding, V. Tarokh and Y. Yang, "Model Selection Techniques," *IEEE Signal Processing Magazine*, 2018.
- [9] "Akaike_information_criterion#Modification_for_small_sample_size," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Akaike_information_criterion#Modification_for_small_sample_size. [Accessed May 2024].

- [10] "Source code for statsmodels.tools.eval_measures," [Online]. Available: https://www.statsmodels.org/devel/_modules/statsmodels/tools/eval_measures.html#aicc. [Accessed May 2024].
- [11] "Bayesian information criterion," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_information_criterion. [Accessed May 2024].
- [12] "Hannan–Quinn information criterion," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Hannan%E2%80%93Quinn_information_criterion. [Accessed May 2024].
- [13] K. P. Burnham and D. R. Anderson, "Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach, 2nd ed.," Springer-Verlag, 2002, p. 287.
- [14] "Coefficient_of_determination," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination. [Accessed May 2024].
- [15] "Mean absolute error," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_absolute_error. [Accessed May 2024].
- [16] "Mean absolute percentage error," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_absolute_percentage_error. [Accessed May 2024].
- [17] "Root mean square deviation," [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Root_mean_square_deviation. [Accessed May 2024].
- [18] R. J. Hyndman, "Forecasting with long seasonal periods," 29 September 2010. [Online]. Available: <https://robjhyndman.com/hyndsight/longseasonality/>. [Accessed May 2024].
- [19] T. G. Smith and others, "pmdarima: ARIMA estimators for Python," 2017. [Online]. Available: <http://www.alkaline-ml.com/pmdarima>. [Accessed 04 2024].

INVESTMENT STRATEGY FOR FORMING A PORTFOLIO OF COMPETITIVE ASSETS⁵

Simona Petrova, Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: karanedeff@gmail.com

Chief Assist. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

Abstract: Financial theory provides methods and models for determining the required return on investment, which is expressed in the Capital Asset Valuation Model. This model helps investors assess whether an asset is adequately priced relative to the risk they take on by investing in it. In this paper we will apply CAPM to compare competitive assets in the S&P 500 portfolio and how they perform in the investment environment. Based on the beta coefficient, return rates, forecast calculations, and other factors, we will demonstrate the applicability of the model with real values.

ВЪВЕДЕНИЕ

Инвестиционните решения винаги са свързани с наличието на множеството възможни изходи. Счита се, че това е присъщо на тяхното свойство - стопанската неопределеност. Тази неопределеност възниква поради редица фактори, като волатилността на пазарите, несигурност в дадената среда, сложността на взаимодействията и събитията, политически рискове и други. Ето защо неопределеността и риска винаги съпътстват инвестиционният процес [1]. Целта на настоящата разработка е да представи алтернативни начини за оценка на риска и изчисляване на бета коефициента, съответно модификации на модела CAPM, които да бъдат подходящи за сформирание на портфейл от прецизно отсяти конкурентно фирми, давайки по-точна оценка за риска и на цената на капитала на компаниите от индекса S&P 500.

Проучванията сочат, че Моделът за оценка на капиталовите активи (МОКА) многократно бива определян за най-широко използваният. Според параграф 21 на Технически информационен документ 1 (ТИД 1), издаден от The International Valuation Standards Council (IVSC), МОКА може да бъде коригиран за политически риск, произтичащ от политическите и икономическите условия в даден регион или държава, и други специфични рискове. В техническия документ не се прави разграничение в приложението на МОКА по отношение на няколко важни особености – [2] нивото на интеграция на даден капиталов пазар (пълна или частична интегрираност или изцяло сегментиран); [3] развитието на капиталовия пазар (дали е периферен, развиващ се или развит); [4] степента на диверсифицируемост на инвеститора (пълна, частична или не диверсифициран инвеститор). Много често при практическото приложение на модела тези особености се пренебрегват. От гледна точка на хипотезите на МОКА това е правилно, защото по презумпция те не съществуват - не се прави разграничение на пазарите по ниво на интегрираност или развитие на капиталовия пазар, допуска се, че инвеститорите са диверсифицирани. Неслучайно най-много модификации с цел подобряване са направени

⁵ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31. 05. 2024 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ИНВЕСТИЦИОННА СТРАТЕГИЯ ЗА ФОРМИРАНЕ НА ПОРТФЕЙЛ ОТ КОНКУРЕНТНИ АКТИВИ.

именно на този модел [5].

Следната формула представя принципа на модела:

$$R_e = r_f + \beta \times [E(r_m) - r_f]$$

Където:

r_f – безрискова норма на възвръщаемост;

β – систематичен риск на обикновените акции;

$[E(r_m) - r_f]$ – пазарна премия за риск.[6]

Определянето на „безрисковата норма на възвръщаемост“ е едно от основните затруднения на модела. Сериозни са споровете относно прилагането на доходностите по краткосрочните съкровищни бонове или използването на нормата на възвръщаемост на дългосрочните държавни облигации. Към настоящия момент обаче, използването на нормата на възвръщаемост по 10-годишните държавни облигации е по-резонно, поради все по стабилна макроикономическа рамка на страната. Определянето на пазарната рискова премия зависи освен от решението за уточняване на „безрисковата норма на възвръщаемост“, но и от очакванията за пазарния риск. Тези очаквания могат да се базират както на историческите данни за показателя, така и на изследванията и очакванията на аналитиците за бъдещето.

Основен момент в модела на CAPM е определянето на β -коефициента, който е измерител на систематичния риск. Вариантите тук са три: изчисляване на исторически β -коефициент, на фундаментален β -коефициент или счетоводен β -коефициент. Историческия β -коефициент се определя на база регресия на възвръщаемостта на тази инвестиция, спрямо възвръщаемостта на даден пазарен индекс. Фундаменталният β -коефициент се определя на база вида и характера на бизнеса, степента на оперативния ливъридж на компанията и финансовия ѝ ливъридж.

Счетоводният β -коефициент се определя на база счетоводните печалби и стои далеч от цената на търгуваните акции. Моделът се прилага широко, тъй като е теоретически най-обоснован и се счита за най-надежден. Ограниченията му са свързани с това доколко точно се определят отделните допускания по него, относно: решение за избор на „безрискова норма на възвръщаемост“, решение за избор на метод за определяне на пазарната рискова премия и най-вече – решение за избор на метод за определяне на β -коефициента [7].

В настоящата работа е приложен модела CAPM, сравнени са достъпните данни на конкурентните компании и е направена прогноза за възвръщаемостта на активите на база исторически данни. След прилагането на CAPM са направени прогнозни изчисления с помощта на ARIMA модели, които имат за цел да покажат каква позиция е разумно да заемем спрямо активите. Чрез гореспоменатите методи ще изградим инвестиционна стратегия за формиране на портфейл, подходяща позиция на инвестиране (купуване/продаване) в даден актив, както и достигане до отговор дали конкурентността има някакво значение, за да се изгради инвестиционна стратегия.

АНАЛИЗ НА КОНКУРЕНТНИ АКТИВИ В S&P500

Кòка-кòла и Пепси са популярни газирани безалкохолни напитки, предлагани по целия свят, две от най-известните и продавани търговски марки в света. Епъл и Майкрософт са американски компании, развиващи дейност в областта на компютърните технологии и разработката на софтуер.

Ето развитието на акциите през последните пет години:



Фигура 1. Ценови данни за период от 5 г. на Кока Кола



Фигура 2. Ценови данни за период от 5 г. на Пепси Кола

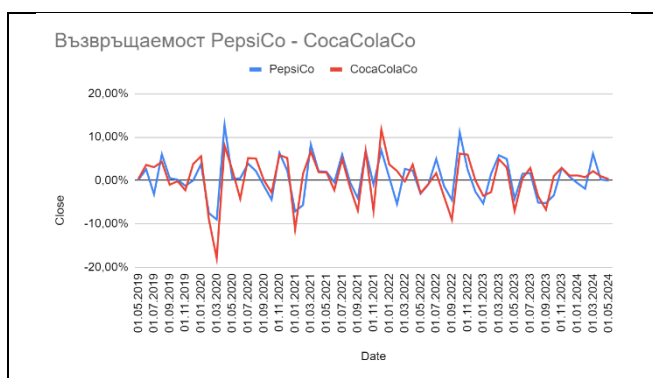


Фигура 3. Ценови данни за период от 5 г. на Епъл

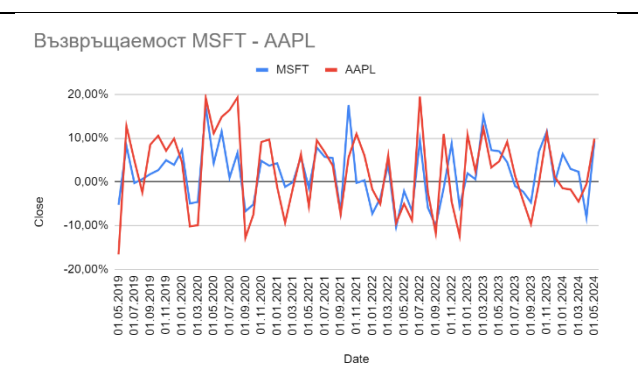


Фигура 4. Ценови данни за период от 5 г. на Майкрософт

За да направим анализа прилагаме готовите данни за ценовото изменение на активите на Кока Кола - Пепси и Епъл - Майкрософт, които са предоставени за свободен достъп в Yahoo Finance. На база на предоставената информация, изчисляваме нормата на възвръщаемост, като разделим разликата между цената в края на периода (Close) и цената в началото (Open), разделяйки го на цената в края на периода. На база на получените резултати на фигура пет и шест е изобразено по двойки (Пепси-КокаКола, Епъл- Майкрософт) нормата на възвръщаемост на конкурентните активи. Визуализирането на възвръщаемостта ни води до извода за постоянна и стабилна доходност на посочените активи.



Фигура 5. Норма на възвръщаемост PepsiCo - CocaColaCo



Фигура 6. Норма на възвръщаемост Microsoft Co. - Apple Inc.

Втората стъпка, която прилагаме е изчисления на бета коефициента на активите и изчисляване очакваната норма на възвръщаемост.

Бета коефициентът в уравнението за МОКА (модел за оценка на капиталовите активи) представлява мярка за систематичния риск на даден актив спрямо пазара като цяло. Другият компонент на уравнението, който ни трябва е нормата на възвръщаемост на безрисковия актив. Безрисковият актив, който често се използва за S&P 500 индекса, е обикновено считан

за 10-годишната щатна облигация. Тази облигация се използва като показател на безрисковата норма на възвръщаемост във финансовите модели, защото се приема, че държавата на САЩ има много нисък риск от неплатежоспособност. Нормата на възвръщаемост на безрисковия актив е дадена в YahooFinance, като вземаме тази която е изчислена на 5 годишна база.

Таблица 1. Получени резултати за очаквана норма на възвръщаемост на активите.

b-та коефициент pepsi	b-та коеф. cocacola	rf	E(ri)pepsi	E(ri)cocacola
0,1816549332	0,1528569402	0,04483	4,08%	4,14%
b-та коеф. AAPL	b-та коеф. MSFT		E(ri)AAPL	E(ri)MSFT
0,3494759328	0,2692449584		3,70%	3,88%

Използвани са следните формули:

Формула 1. Бета коефициент

$$\beta_i = \frac{cov_{im}}{\sigma_m^2}$$

Формула 2. Очаквана норма на възвръщаемост

$$R_e = r_f + \beta \times [E(r_m) - r_f]$$

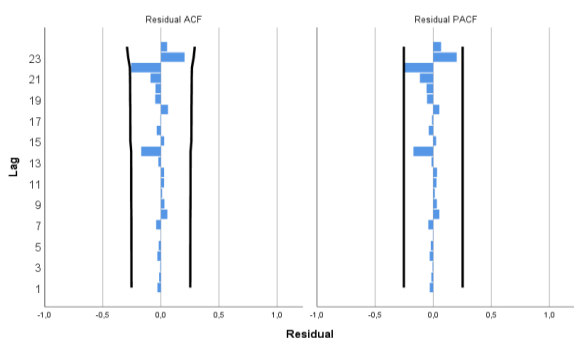
За изчисляването на очакваната норма на възвръщаемост на пазара(S&P500) е използван SPSS - Descriptive statistics - Frequencies. Ето и получения резултат:

Таблица 2. Очаквана норма на възвръщаемост на пазара - S&P500.

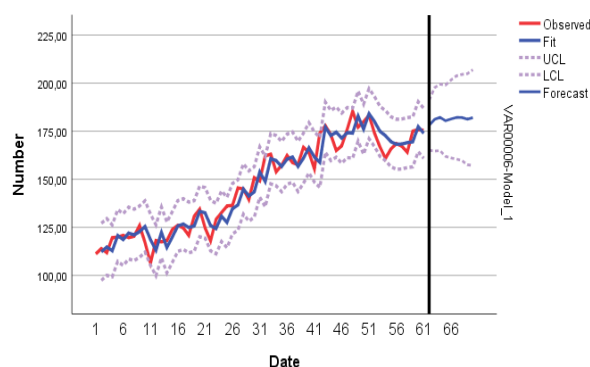
Statistics		
S&P500		
N	Valid	61
	Missing	0

Очакваната норма на възвръщаемост ни показва тенденцията, с която се движат цените, дали е разумно да се инвестира в дадените активи и как те се развиват във времето.

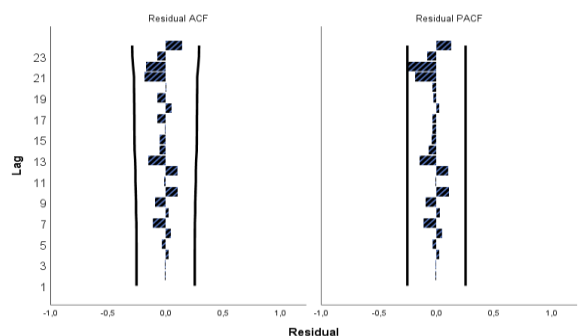
След което се насочваме към анализ на активите в SPSS, прилагайки ARIMA модели. В дадената работа моделите ни дават представа за бъдещото движение на цените, в зависимост от което се прави прогноза за бъдещите действия - купуване, продаване или задържане на активите. За да сформираме портфейла, анализираме предоставените ни данни, правим преценка за развитието на активите дали са устойчиви и как те биха се отразили на излагането ни на риск. Прилагане на ARIMA модели:



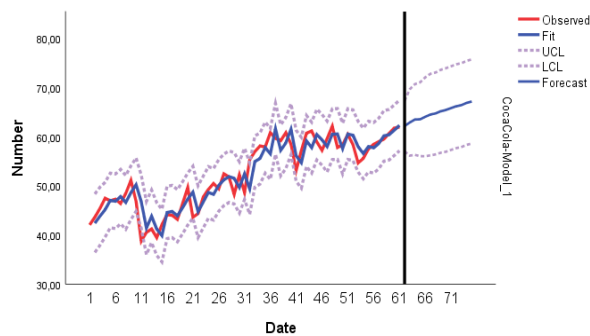
Фигура 7. PepsiCo ACF и PACF



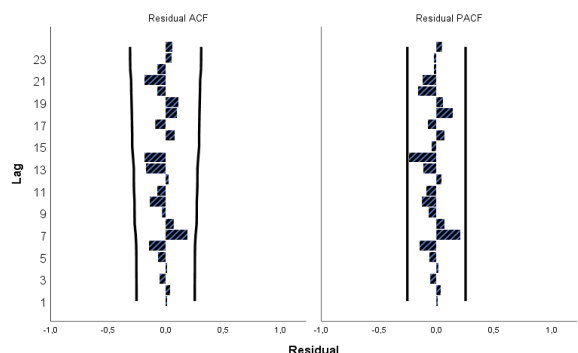
Фигура 8. ARIMA (8, 1, 5) модел



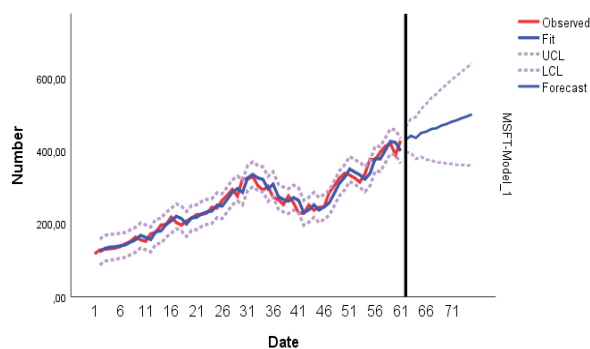
Фигура 9. CocaColaCo ACF u PACF



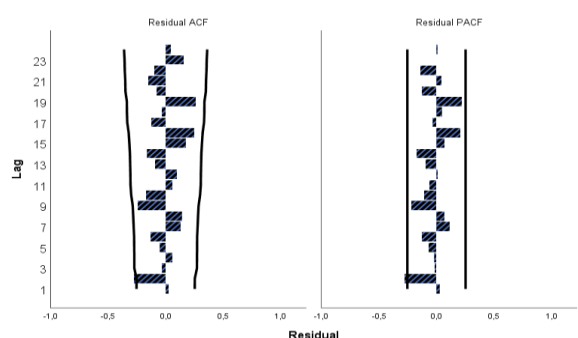
Фигура 10. ARIMA(7, 1, 3) модел



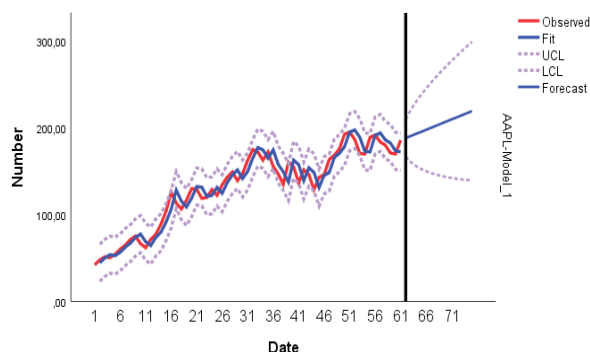
Фигура 11. Microsoft Corporation ACF u PACF



Фигура 12. ARIMA(4, 1, 0) модел



Фигура 13. Apple Inc ACF u PACF

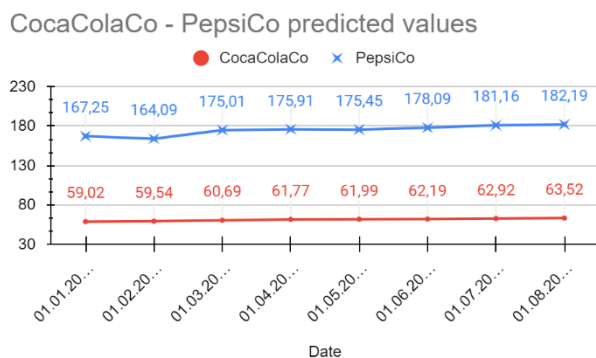


Фигура 14. ARIMA(0, 1, 0) модел

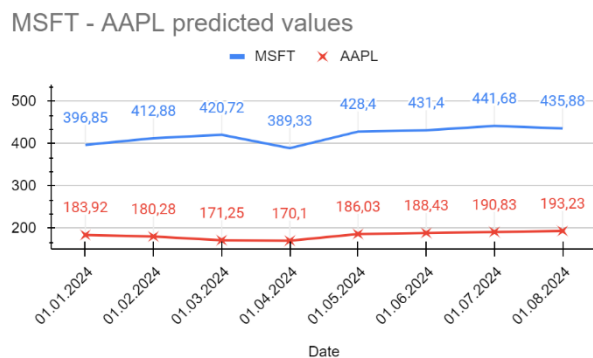
Приложените модели ни дават информация за растящи бъдещи стойности на цените. Изводът до който стигаме е, че перспективата за инвестиция в дадените активи е положителна. За да се направи по-точна преценка за инвестиционна стратегия, анализираме дадените и прогнозираните стойности в по-кратък диапазон от време. Получени резултати:

Таблица 3. Прогнозни бъдещи цени за следващите три месеца

Date	Actual - Predicted			
	AAPL	MSFT	CocaColaCo	PepsiCo
01.01.2024	183,92	396,85	59,02	167,25
01.02.2024	180,28	412,88	59,54	164,09
01.03.2024	171,25	420,72	60,69	175,01
01.04.2024	170,1	389,33	61,77	175,91
01.05.2024	186,03	428,4	61,99	175,45
01.06.2024	188,43	431,4	62,19	178,09
01.07.2024	190,83	441,68	62,92	181,16
01.08.2024	193,23	435,88	63,52	182,19



Фигура 15. Стойностно изражение на цените на CocaColaCo и PepsiCo



Фигура 16. Стойностно изражение на цените на MSFT и AAPL

От Фигура 15 се вижда че прогнозните цени на Кока-Кола и Пепси са стабилни с леки изменения в положителна посока и позицията, която е разумно да заемем е задържане. Ако прогнозните изчисления за напред покажат по-сериозни вариации, то би следвало да закупим, ако се очаква покачване и обратно - да продаваме, ако се очаква спад в цената на актива.

От Фигура 16 се виждат прогнозните цени за юни, юли и август месец на два от активите, при които има леки изменения, но в различни посоки. Епъл има леко покачване на цените, при което най-реалистичната позиция, която можем да заемем е задържане, тъй като разликата не е толкова значителна. От друга страна цената на Майкрософт варира по-значително, като април има сериозно понижение в показателите, подходящо за купуване на актива, май месец се стабилизира и постепенно се покачва. Волативността е по-голяма и решението за заемане на позиция би следвало да е месец за месец. Ако прогнозните данни дадат по-значителна разлика в стойностите си, базирано на тези движения, вероятността за правилно опериране с активите е почти сигурно с вероятност от съвсем леки разминавания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Пресметната е нормата на възвръщаемост на две двойки конкурентни активи в период от 5 години.
2. Приложен е Моделът за оценка на капиталовите активи.
3. Пресметната е очакваната норма на възвръщаемост на пазара - S&P500.
4. Приложени ARIMA модели, от които са изведени прогнозни бъдещи стойности на активите.
5. Чрез получените стойности за цените на активите е изградена инвестиционна стратегия за всеки от активите и позицията на инвеститора спрямо пазара.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

[1] проф. д-р Радослав Цонев, Красимир Костенаров: МОДЕЛЪТ D-SARМ ПРИ ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОЧАКВАНАТА ДОХОДНОСТ НА КОМПАНИИТЕ НА ФОРМИРАЦИЯ СЕ КАПИТАЛОВ ПАЗАР В БЪЛГАРИЯ.

[2] Павлов, Цв. Приложение на поведенческите финанси при моделиране на българската рискова премия на акциите // Бизнес управление, брой 2, 2015г, стр. 96-130.

[3] Пътев, Пл. и Н. Канарян, Управление на портфейла, АБАГР 2008.

- [4] Blume, Marshall. 1971. "On the Assessment of Risk. " Journal of Finance . Vol. 26, No. 1: 1-10.
- [5] Димитър Ненков и Дияна Митева-Бончева: Икономически и социални алтернативи, брой 3, 2018
- [6] Гл. ас. д-р Нигохос Канарян: ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЦЕНАТА НА СОБСТВЕНИЯ КАПИТАЛ ЧРЕЗ МОДЕЛА ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ: БИЗНЕС КАЗУСИ В РАЗВИВАЩИТЕ СЕ ПАЗАРИ, 2016.
- [7] Северин Въртигов: МЕТОДОЛОГИЯ ЗА ОЦЕНКА НА ДЕЙСТВАЩО ПРЕДПРИЯТИЕ.

ENGEL'S CURVE: MODELING THE RELATIONSHIP BETWEEN CONSUMPTION AND INCOME ⁶

Blagovesta Petrova, Student

Financial Mathematics Student
Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: blagavest.2001@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Abstract: In the 19th century, the German statistician Ernst Engel conducted groundbreaking research on consumer behavior, particularly focusing on how income impacts spending across different categories. His findings, published in 1857, established a foundation for future studies in this area. Engel discovered that there exists an inverse relationship between income and the consumption of certain goods, which laid the groundwork for modern consumer behavior theory. Based on that theory, the current paper examines the relationship between consumption of three commodities and money income. A correlation analysis is performed, based on which inverse models are constructed for the consumption of each of the three commodities. The models are tested for adequacy and significance of coefficients as well as normality of residuals. A comparative analysis of the results is done.

Key words: Consumer Behavior, Engel's Curve, Income-Expenditure Relationship, Inverse Model

REFERENCES

- [1] Montclair State University,
<<https://msuweb.montclair.edu/~lebel/PSC643IntPolEcon/EngelCurves.pdf>>.
- [2] Greelane, <greelane.com/>.
- [3] Chai, A., & Moneta, A., 2010. Retrospectives: engel curves. Journal of Economic Perspectives, 24(1), 225-240, <<https://pubs.aeaweb.org/doi/pdf/10.1257/jep.24.1.225>>.
- [4] Gujarati, D., 2005. Basic Econometrics. Fourth edition, Mc – Graw – Hill, New York.
- [5] National Statistical Institute, <<http://www.nsi.bg/>>.
- [6] Harvard Health Publishing, <https://www.health.harvard.edu/newsletter_article/how-many-eggs-can-i-safely-eat>.

⁶ This Report is presented on a Student Scientific Session on 31 May 2024 in the "Financial Mathematics" section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with "Best Paper" Cristal Prize'24, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).

**FORECASTING PRICES AND COMPILING AN OPTIMAL RISK
PORTFOLIO OF STOCKS AND BONDS ⁷**

Gyulen Hristov, Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: gulenhristov@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

***Abstract:** In the present article, a technical analysis of two financial instruments has been conducted, using historical data to assess the standard deviations from the norms of returns and correlation matrix. Time series are used for forecasting the prices of the discussed instruments, with a particular emphasis on ARIMA models. Optimal risk portfolio is conducted from the two assets, based on the principles of Markovitz theory.*

***Key words:** Time series, ARIMA, Price Forecasting, Optimal Risk Portfolio.*

ВЪВЕДЕНИЕ

В тази статия се анализират времеви редове с цел предвиждане на цените на два финансови инструмента, попадащи в различни класове активи – акции и облигации. Комбинирането на акции и облигации помага за диверсификацията, като намалява общия риск на портфейла. Инвеститорите често комбинират акции и облигации, за да постигнат баланс между потенциалните приходи и риска. Облигациите могат да предоставят стабилност, докато акциите могат да допринесат за растеж. За изпълнението на техническия анализ се използват реални данни, които се обработват чрез Excel. Процесът включва оценка на стандартните отклонения от нормите на възвръщаемост и корелационната матрица между тях. За прогнозиране на цените на акциите се използват вградени методи в SPSS (виж [1]), като се базират на времеви редове, по-конкретно на модели ARIMA.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Анализиране на времеви редове с цел предвиждане на движението на акциите

Различни методи за моделиране на времеви редове са подходящи за изследване и прогнозиране на движението на цените на акциите. Тези методи варират от класически времеви редове, авторегресивни модели (AR), подвижна средна стойност (MA), авторегресивно-подвижна средна стойност (ARMA) до авторегресивно-интегрирани движещи се средни стойности (ARIMA) (виж [3]). Стандартният анализ на данните включва три ключови стъпки: идентификация, оценка и диагноза (виж [3]).

Първата фаза включва идентификацията на времевите редове чрез анализ на данните чрез изчисляване и визуализация на графики, включително автокорелационни функции (ACF) и частични автокорелационни функции (PACF). Автокорелациите представляват независими корелации в резултат на поредицата със себе си, изпускайки един или повече периоди в миналото (лаг). Частичните автокорелации представляват независими корелации с интервали между тях. Различни модели на авторегресивни подвижни средни (подмножества от данни с подобно поведение) често влияят върху конкретни промени в автокорелационните

⁷ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31.05.2024 в секция Финансова математика с оригинално заглавие на български език: ПРОГНОЗИРАНЕ НА ЦЕНИТЕ И СЪСТАВЯНЕ НА ОПТИМАЛЕН РИСКОВ ПОРТФЕЙЛ ОТ АКЦИИ И ОБЛИГАЦИИ.

и частичните автокорелационни функции. При дълги времеви редове могат да се наблюдават тенденции, показващи периодични промени, наречени сезонност, периодичност или цикличност. Така сезонността представлява друг вид автокорелация, обикновено присъстваща в наборите от данни. Периодичните промени могат да се забележат и за кратки времеви интервали. Идентификацията на тези модели може да бъде осъществена чрез ACF и PACF преди изграждането на модела и може да помогне за предварително определение на параметрите (p , d , q). Анализът на времеви редове се явява по-подходящ метод за моделиране на автокорелирани данни, в сравнение с линейната регресия. Най-честата причина, поради която линейната регресия и класическите методи не създават подходящи модели, е нарушаването на предположението за независимост на грешките, като грешките също са автокорелирани, което трябва да бъде взето предвид от модела.

В следващата фаза на анализа на времеви редове се извършва създаването на модел и оценка на неговите параметри, които се проверяват спрямо нулевата хипотеза, че те са равни на нула.

Третата фаза включва диагностика, при която се анализират остатъците - разликите между предвидените от модела стойности и наблюдаваните данни. Теоретично, остатъците трябва да са произволни и да следват нормално разпределение. Ако не е така, това подсказва наличието на допълнителни модели в данните. При включване на всички модели, остатъците стават произволни. Идентификацията и моделирането на модели в данните водят до уравнение, което може да се използва за прогнозиране.

Моделът ARIMA се създава с три параметъра: p (авторегресия), d (интеграция) и q (подвижна средна стойност) (виж [3]). Той се представя със следното уравнение (виж [3], [4]):

$$Y_t = C + \varphi_1 \Delta^d Y_{t-1} + \dots + \varphi_p \Delta^d Y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t,$$

където $C, \varphi_i, i = \overline{1, p}$, и $\theta_j, j = \overline{1, q}$ са параметри, а ε_j е произволно разпределена променлива с очакване 0 и дисперсия σ^2 .

При липса на конкретна информация за разпределението, се предполага, че то е нормално по подразбиране [4]. Операторът за промяна Δ се дефинира така:

$$\begin{aligned}\Delta^0 Y_t &= Y_t, \\ \Delta^1 Y_t &= Y_t - Y_{t-1} \\ \Delta^k Y_t &= \Delta^{k-1} Y_t - \Delta^{k-1} Y_{t-1}\end{aligned}$$

ACF и PACF графиките се използват за изследване на съчетанията от параметри (p , d , q).

Формулата за ACF в момента t за k -тия лаг има следния вид:

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2},$$

където n е броят на наблюденията, k е изоставането, $\bar{Y}$ е средната стойност на времевата поредица, а знаменателят е дисперсията на поредицата. Формулите за изчисляване на частични автокорелации са изключително сложни и включват рекурсивни методи (виж [5]).

Описание на данните

В тази статия се проследяват седмични данни за цените на два различни типа финансови инструменти за периода от 1 януари 2021 г. до 15 декември 2023 г. (общо 154 наблюдения). Информацията е извлечена от Yahoo Finance (виж [2]). Причината за избиране на конкретната акция и облигация е отрицателната корелация между тях, която осигурява диверсификация на портфолиото и смекчава риска от потенциални загуби. В случай на

неблагоприятно движение на пазара, когато стойността на акцията спада, облигацията обикновено изживява по-добра производителност, компенсирайки загубата от акцията. Тази стратегия помага да се минимизира потенциалният риск и да се оптимизира дългосрочната доходност на портфолиото.

Кока-Кола се отличава като акция поради своето стабилно и дългосрочно устойчиво представяне на пазара. Като световен лидер в индустрията на напитките, компанията е известна със завидна глобална присъственост и силна потребителска марка. Инвеститорите се привличат от нейния консервативен подход, диверсифициран портфейл от продукти и способността ѝ да се адаптира към тенденции в потребителските предпочитания. Кока-Кола е често избирана за инвестиция поради нейния дългосрочен растеж, стабилно дивидентно възнаграждение и устойчиво финансово представяне.

Vanguard USD Treasury Bond UCITS ETF (VUTY.L) се отличава с добри финансови резултати и висока стабилност. Този облигационен фонд, управляван от Vanguard, предоставя на инвеститорите висококачествени облигации, свързани с американското правителство. Стабилността на този ETF произтича от неговата ориентация към облигации с нисък риск, предлагайки портфейл, осигуряващ сигурност и предсказуемост.

Таблица 1 показва нормата на възвръщаемост и стандартното отклонение по исторически данни.

Таблица 1. Норма на възвръщаемост и стандартно отклонение по исторически данни

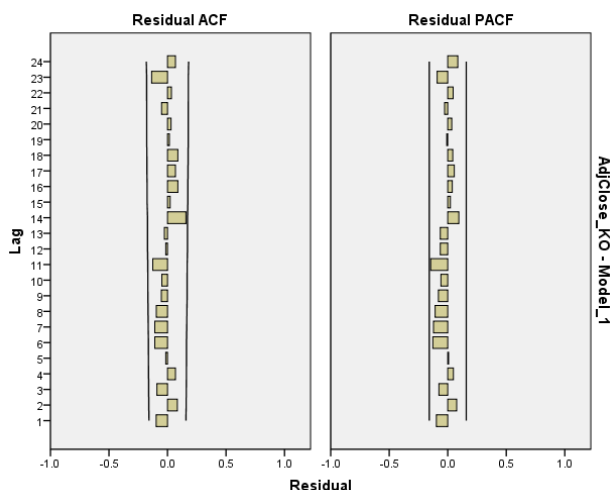
Финансов инструмент	Историческа норма на възвръщаемост	Историческо стандартно отклонение
КО	0,1840%	2,3848%
VUTY.L	-0,0317%	2,7541%

С оглед на коефициентите на корелация, изглежда, че двата актива, КО и VUTY.L, имат слаба отрицателна корелация от -0.071. Това може да бъде ползотворно за инвеститорите, които се стремят към диверсификация на риска в портфолиото си, тъй като двата актива реагират различно на пазарните условия. Като се има предвид по-ниската волатилност на VUTY.L в сравнение с КО, отрицателната корелация може да допринесе за балансиране на портфолиото и намаляване на общия риск.

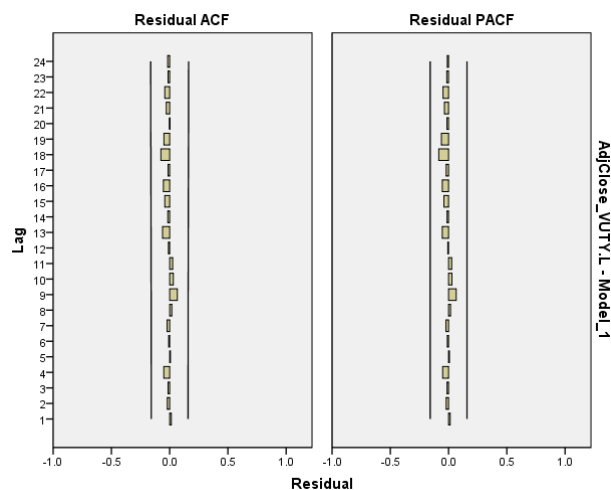
Прогнозиране на цените

Използвайки наличната информация, са създадени модели ARIMA с цел предоставяне на прогнози за цените на финансовите инструменти за един период напред (в този случай за една седмица или за 22.12.2023 г.). За създаване на моделите е използван софтуерът SPSS, като изборът на моделите е направен чрез опцията Expert Modeler в софтуера.

За всеки финансов инструмент се проучват графиките на автокорелационната функция (ACF) и частичната автокорелационна функция (PACF). В моделите не се наблюдават аномалии или скокове, които да излизат извън границите на 95-процентните доверителни интервали.



Фигура 1. Автокорелационна функция (ACF) и частична автокорелационна функция (PACF) на KO



Фигура 2. Автокорелационна функция (ACF) и частична автокорелационна функция (PACF) на VUTY.L

Таблица 2 представя избора на модел за всеки от финансовите инструменти, статистиката за нормализирания информационен критерий на Бейс (BIC) и прогнозите за цените на финансовите инструменти от моделите ARIMA за дата 22.12.2023 г., срещу цените от последния период на наблюдение (15.12.2023 г.), както и очакваната норма на възвръщаемост, която е изчислена като относителната разлика между тези цени. BIC (вижте [6]) включва сложност на модела $k \cdot \log(n)$, където k е броят на параметрите в модела, а n е броят на наблюденията. Този критерий е базиран на теорията на Бейс. Това е апроксимация на фактора на Бейс, който избира модела с най-голяма апостериорна вероятност. Колкото по-малка е стойността на BIC, за толкова по-добър се счита моделът.

Таблица 2. BIC, прогнозни цени, последни известни цени и очаквана възвръщаемост

Финансов инструмент	Вид модел	BIC	Прогнозна цена	Последна известна цена	Очаквана норма на възвръщаемост
KO	ARIMA (0,1,0)	0,619	58,07	57,99	0,1386%
VUTY.L	ARIMA (0,1,1)	-1,557	17,42	17,45	-0,1175%

Може да се види, че очакваната норма на възвръщаемост за акцията е положителна, докато за облигацията е отрицателна. Това означава, че инвеститорите трябва да вземат къса позиция (позиция „продай“) за облигацията и дълга позиция (позиция „купи“) за акцията.

Оптимален рисков портфейл от два рискови актива

Дял от средствата, означен с w_D , е инвестиран в облигационния фонд, а остатъкът: $1 - w_D$, означен с w_E – във фонда от акции. Нормата на възвръщаемостта на този портфейл е (виж [7]):

$$r_p = w_D r_D + w_E r_E,$$

където r_p означава нормата на възвръщаемост на портфейла, r_D – нормата на възвръщаемост на облигационния фонд, а r_E – нормата на възвръщаемост на фонда с акциите. Очакваната норма на възвръщаемост на портфейла е средно претеглена стойност от очакваните възвръщаемости на съставните ценни книжа с тегла, равни на пропорциите, с които те участват в портфейла (виж [7]):

$$E(r_p) = w_D E(r_D) + w_E E(r_E).$$

Дисперсията на портфейла с два актива е:

$$\sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 + 2w_D w_E \text{cov}(r_D, r_E),$$

където $\text{cov}(r_D, r_E) = \sigma_D \sigma_E \rho(r_D, r_E)$ е ковариацията на портфейла, σ_D и σ_E са стандартните отклонения съответно на фонда с облигации на този с акции, а $\rho(r_D, r_E)$ е корелацията между тях.

Наклонът S на линията на разпределение на капитала (Capital Allocation Line – CAL) за рисковия портфейл се намира от (1).

$$S = \frac{[E(r_p) - r_f]}{\sigma_p}, \quad (1)$$

където r_f – нормата на възвръщаемост на безрисковия актив. В тази работа за безрисков актив са използвани 10-годишни американски съкровищни бонове с 0,0865% седмична възвръщаемост.

Оптималният рисков портфейл е този, който има максимално отношение риск-възвръщаемост (виж [7]). Съответно, за разглеждания рисков портфейл от 2 рискови актива, задачата за намиране на оптимален рисков портфейл се свежда до оптимизационна задача (2):

$$\begin{aligned} \max_{w_i} S &= \frac{[E(r_p) - r_f]}{\sigma_p} \\ w_D + w_E &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

В случая на два рискови актива може да се покаже, че решението за теглата на оптималния рисков портфейл се дава от (3):

$$\begin{cases} w_D = \frac{[E(r_D) - r_f] \sigma_E^2 - [E(r_E) - r_f] \text{cov}(r_D, r_E)}{[E(r_D) - r_f] \sigma_E^2 + [E(r_E) - r_f] \sigma_D^2 - [E(r_D) - r_f + E(r_E) - r_f] \text{cov}(r_D, r_E)} \\ w_E = 1 - w_D \end{cases} \quad (3)$$

Теглата на финансовите инструменти КО и VUTY.L са намерени, използвайки (3), откъдето се получава оптимален рисков портфейл с очаквана доходност 0,13% и стандартно отклонение 1.78%. Наклонът на линията на разпределение на капитала за този портфейл е 0,03. Ациите на компанията КО съставят 67.12% от рисковия портфейл и следва да се държат в дълга позиция (позиция „купи“), а облигациите на VUTY.L - съставят 32.88% от рисковия портфейл и следва да се играят в къса позиция (позиция „продай“).

Таблица 3. Прогнозирани, действителни стойности и тегла в портфейла

Финансов инструмент	Прогнозна стойност	Тегла в портфейла	Последна известна цена	Актуална цена към 22.12.2023
КО	58.0704	67.12%(+)	57.9900	58.7500(+)
VUTY.L	17.4245	32.88%(-)	17.4450	17.3920(-)

В колона 3 от таблица 3 са представени дялът и позицията (дълга (+) и къса (-)) за двата финансови инструмента. Последната колона, която също показва (+) и (-), представя реалното движение на цените на затваряне. Изчислена е разликата между последната известна цена и действителната цена за всеки финансов инструмент, включен в портфейла. Като се вземат предвид позициите (дълги, къси) и процентното разпределение на портфейла, е възможно да се изчисли каква би била реалната процентна възвръщаемост. Тенденциите и на двата инструмента са правилно прогнозирани.

Нека съпоставим действителната и прогнозираната процентна възвръщаемост.

Реална възвръщаемост:

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i w_i \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{p_{i,n}} * 100 = \left[0,6712 * \frac{58,75 - 57,99}{57,99} + 0,3288 * \frac{17,392 - 17,445}{17,445} \right] * 100 = 0,98\%,$$

Прогнозирана възвръщаемост:

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i w_i \frac{\hat{p}_{i,n+1} - p_{i,n}}{p_{i,n}} * 100 = \left[0,6712 * \frac{58,0704 - 57,99}{57,99} + 0,3288 * \frac{17,4245 - 17,445}{17,445} \right] * 100 = 0,13\%,$$

където $p_{i,n}$ – последна известна цена за актив i , $p_{i,n+1}$ – реална цена за актив i , $\hat{p}_{i,n+1}$ – прогнозна цена за актив i , а ε_i – приема стойности -1 и 1 в зависимост от това дали посоката на тренда е коректно прогнозирана. Получената възвръщаемост е на седмична база, съответно тя се равнява на годишна реална възвръщаемост от близо 51%.

ИЗВОДИ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Извършен е технически анализ на избрани финансови инструменти въз основа на реални данни с помощта на Excel. За прогнозиране на ценовите движения на тези инструменти е използван методът ARIMA. В резултат на това са оценени очакваните норми на възвръщаемост на финансовите инструменти.
2. Определени са процентните дялове на финансовите инструменти в оптималния рисков портфейл. Изчислени са очакваната норма на възвръщаемост, стандартното отклонение и линията на разпределение на капитала за този портфейл.
3. Въз основа на дългите и късите позиции, процентното разпределение на портфейла, последните известни и действителните цени е изчислен реалният процент на възвръщаемост. На годишна база този процент възлиза приблизително на 51%.

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024-ФПНО-02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] IBM SPSS Software, URL: <https://www.ibm.com/analytics/spss-statistics-software>
- [2] Yahoo Finance, URL: <https://finance.yahoo.com/>
- [3] Ngo, T. H. D., Bros, W. (2013). The Box-Jenkins methodology for time series models. *Proceedings of the SAS Global Forum 2013 Conference*, vol. 6, pp. 1-11.
- [4] MathWorks Website. ARIMA method, URL: www.mathworks.com/help/econ/arima.html?searchHighlight=arima&s_tid=doc_srchtile
- [5] Tabachnick B., Fidell, L., Ullman, J. (2007). *Using multivariate statistics*. Boston.
- [6] Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *Ann. Stat.*, 6, 46-464.
- [7] Bodie Z., Kane A., and Marcus A. (2014). *Investments*. Berkshire: McGraw-Hill Education, 10th global ed.

MODELLING THE RELATIONSHIP BETWEEN GROSS DOMESTIC PRODUCT AND CHANGES IN THE BROAD MONETARY AGGREGATE⁸

Mertan Ismet, Student

Financial Mathematics Student
University of Ruse „Angel Kanchev“
E-mail: mertanismet@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse „Angel Kanchev“
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

Abstract: *The relationship between gross domestic product (GDP) and monetary aggregates of a country is an important indicator of its economy. In our study, we focus on the analysis of the relationship between gross domestic product and the broad monetary aggregate (M3). GDP is a key indicator of economic activity in a country, measuring the value of all goods and services produced. At that time, M3 represented an important aspect of the monetary system, including debt securities with maturities of up to two years and shares of money funds. This study analyzes in detail the relationship between GDP and M3, in order to better understand the impact that the monetary aggregate can have on economic activity and stability in Bulgaria.*

Key words: *Gross Domestic Product, Broad Monetary Aggregate M3, Linear Relationship.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Брутният вътрешен продукт, познат също като БВП, представлява общата стойност на всички произведени стоки и услуги в дадена страна за определен период от време, изразена в местна или чуждестранна валута. БВП се счита за един от най-значимите и всеобхватни показатели за оценка на икономическата активност в дадена държава. Промените в БВП с течение на времето се разглеждат като фундаментален показател за икономическата дейност и представянето на икономиката. В същото време, той служи и като важен индикатор при анализа на икономически явления като растеж, рецесия или депресия [1].

Брутният вътрешен продукт може да бъде измерен по два основни начина:

- Номинален БВП - отразява производството по текущите цени на валутата;
- Реален БВП - взема предвид ефектите от индекса на потребителските цени върху валутата и предоставя по-реалистична оценка на актуалното производство.

За да се направи сравнение между икономиките на различни страни, БВП на глава от населението се използва често като стандартизиран индикатор. Този показател измерва средното производство на стойност на глава от населението и се използва като инструмент за оценка на благосъстоянието на нацията.

Парични агрегати – това са елементите, изграждащи паричното предлагане. С други думи – това са всичките пари, които се намират в една икономика [2]. Трите вида парични агрегати, които съществуват, се обозначават с M_1 , M_2 и M_3 . M_1 е парите (банкноти и монети) в населението на дадена държава, M_2 е сумата от M_1 и краткосрочни депозити, спестовни книжки, сметки за търсене и ежедневни споразумения за обратно изкупуване, а M_3 представлява важен аспект от паричната система на всяка държава и включва M_2 и други финансови инструменти. Той е наричан също "широки пари" и включва още дългови ценни книжа със срок до две години и акции на паричните фондове. Важната характеристика на M_3 в контекста на българската икономика е, че стойността му се доближава значително до тази на M_2 и дори се пресича с нея. Това се дължи на ниските стойности на репо сделките в

⁸ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31.05.2024 в секция Финансова математика с оригинално заглавие на български език: МОДЕЛИРАНЕ НА ВРЪЗКАТА МЕЖДУ БРУТНИЯ ВЪТРЕШЕН ПРОДУКТ И ИЗМЕНЕНИЕТО В ПАРИЧНИЯ АГРЕГАТ „ШИРОКИ ПАРИ“.

активите на финансовите институции и предимството на издадените дългови ценни книжа с двугодишен срок [3].

В тази статия е изследвана връзката между номиналния БВП на България на глава от населението и годишното изменение в M_3 , с цел анализиране на влиянието на паричния агрегат върху икономическата производителност на страната.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Връзката между БВП и M_3 може да бъде илюстрирана по няколко начина [4]. Първо, увеличаването на БВП обикновено води до увеличаване на паричната маса, включително M_3 . По-голямото производство и икономическият растеж могат да подпомогнат засилването на доверието на инвеститорите и банките, което на свой ред насърчава заемите и инвестициите, увеличавайки паричната маса. От друга страна, паричната маса M_3 може да оказва влияние върху БВП. Ниски стойности на M_3 могат да създадат условия за по-строги финансови ограничения и ограничаване на кредитната активност, което може да намали икономическия растеж. Обратно, растежът на M_3 може да насърчи инвестициите и консумацията, допринасяйки за повишаване на БВП.

В настоящата работа са разгледани годишни данни за номиналния БВП на България на глава от населението (в евро) и годишното изменение в M_3 (%) за периода 2011-2022 г. Данните са взети от Националния Статистически Институт (НСИ) [5].

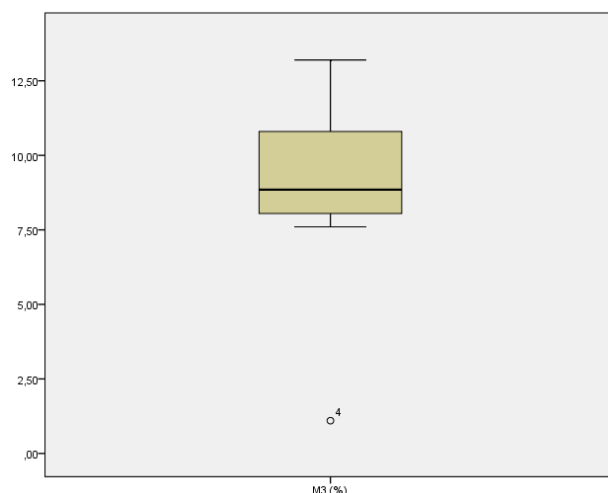
Таблица 1. Годишни данни за номиналния БВП на България и годишното изменение

Година	БВП на глава от населението (в евро)	Изменение в M_3 (%)
2011	5640	12,2
2012	5780	8,4
2013	5790	8,9
2014	5960	1,1
2015	6380	8,8
2016	6840	7,6
2017	7420	7,7
2018	8000	8,8
2019	8820	9,9
2020	8880	10,9
2021	10330	10,7
2022	13270	13,2

Разпределение и трансформация на данните

Тестът на Колмогоров-Смирнов показва, че БВП и годишното изменение в M_3 са нормално разпределени. Въпреки това, в годишното изменение в M_3 има наличие на екстремна стойност (т.нар. outlier) – това е стойността от 1,1% за 2014 г., която се отклонява много от останалите (фигура 1, наблюдение номер 4). За целите на настоящата работа това наблюдение е заместено със средната аритметична стойност на съседните му наблюдения, като за изчислението са използвани предходните 2 и следващите 2 наблюдения и е получена стойност 8,43%.

Оттук нататък анализът продължава като за изменението в M_3 (накратко ще го наричаме само M_3) ползваме данните с трансформираната стойност за 2014 г.



Фигура 1. Анализ за отдалечени стойности в годишното изменение в М₃.

Проверка за корелираност

Изследвана е връзката между БВП и М₃. За целта е направена корелационна матрица (таблица 2), от която се вижда, че корелационният коефициент на Пирсън е 0,628, което е индикатор за умерена корелация между променливите. При ниво на значимост 0,05, той е значим. Тъй като знакът на коефициента на корелация е положителен, това означава, че с нарастване на БВП, се очаква М₃ също да расте.

Таблица 2. Корелационна матрица: стойности на коефициента на Пирсън

	БВП на глава от населението (в евро)	Трансформирано изменение в М ₃ (%)
БВП на глава от населението (в евро)	1	0,628
Трансформирано изменение в М ₃ (%)	0,628	1

Направена е корелограма на БВП и трансформираното М₃, която показва, че линейният тренд не е много добре изразен, наблюдава се цикличност, затова ще направим трансформация на данните за БВП, като ги диференцираме.

Корелационната матрица за диференцирания БВП и трансформираното М₃ (таблица 3) показва, че корелационният коефициент на Пирсън е 0,769, което е индикатор за силна корелация между променливите. Коефициентът е значим при ниво на значимост 0,01.

Таблица 3. Корелационна матрица: стойности на коефициента на Пирсън

	Диференциран БВП на глава от населението (в евро)	Трансформирано изменение в М ₃ (%)
Диференциран БВП на глава от населението (в евро)	1	0,769
Трансформирано изменение в М ₃ (%)	0,769	1

Линейни регресионни модели

Построени са два модела за регресионен анализ между БВП и М₃: първият е класически линейен регресионен модел между БВП и трансформираното М₃, а при втория модел са използвани диференцираните данни за БВП. Резултатите от двата модела са сравнени.

Модел 1: Линейен регресионен модел между БВП и трансформираното М₃

От таблица 4 се вижда, че изгладеният коефициент на детерминация (Adjusted R Square) на Модел 1 е 0,333. Това показва, че 33,3% от измененията в БВП зависят от изменения в трансформираното М₃.

Таблица 4. Обобщени статистики за Модел 1

R	R ²	Изгладен R ²	Стандартна грешка на оценките
0,628	0,394	0,333	1871,590

От таблица 5 може да се провери, че линейният модел е адекватен на съществуващата значима връзка между БВП и трансформираното M_3 с гаранционна вероятност 97%.

Таблица 5. ANOVA таблица за Модел 1

	Суми от квадрати	Степени на свобода	Суми от квадрати/ степени на свобода	F	Sig
Регресия	22774183,52	1	22774183,52	6,502	0,029
Остатъци	35028508,15	10	35028508,15		
Общо	57802691,67	11			

От таблица 6 се вижда, че с гаранционна вероятност 97% старшият регресионен коефициент $\beta_2=807,788$ е статистически значим, докато свободният член $\beta_1= -17,475$ е статистически незначим.

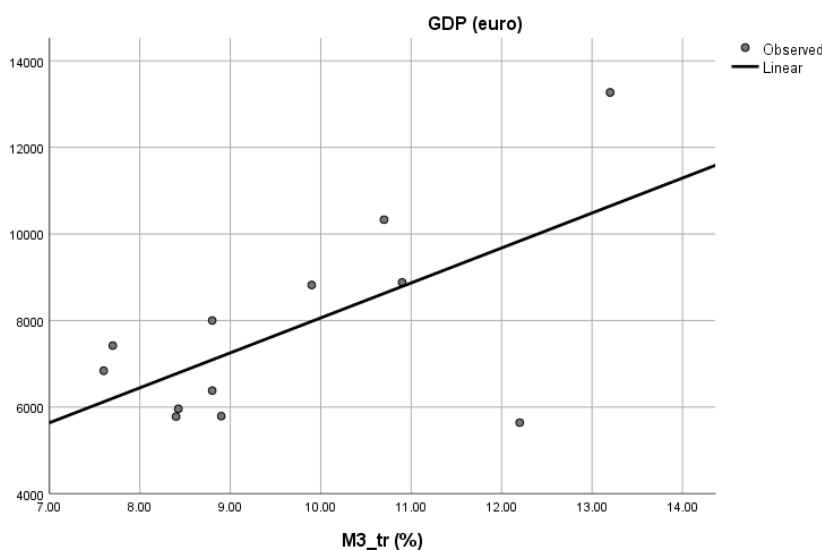
Таблица 6. Коефициенти на Модел 1

	Нестандартизирани коефициенти		Стандартизирани коефициенти		Sig.
	B	Станд. грешка	Beta	t	
M3_tr (%)	807,788	316,801	0,628	2,550	0,029
(Constant)	-17,475	3097,357		-0,006	0,996

Линията на регресия (таблица 6) има вида:

$$\widehat{GDP}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 M3_i = -17,475 + 807,788 M3_i$$

Старшият регресионен коефициент $\hat{\beta}_2=807,788$ показва, че при увеличаване на годишното изменение в M_3 с 1% може да се очаква БВП на глава от населението да се увеличи с 807,788 евро.



Фигура 2. Модел 1: Линеен регресионен модел между БВП и трансформираното M_3

От фигура 2 става ясно, че линейният модел не описва толкова добре данните. Това се дължи в известна степен и на малкия брой записи (12 наблюдения за 12 години).

Модел 2: Линеен регресионен модел между диференцирания БВП и трансформираното M_3

За модела с диференцираните данни на БВП от таблица 7 се вижда, че изгладеният коефициент на детерминация на Модел 2 е 0,546. Това показва, че 54,6% от измененията в диференцирания БВП зависят от измененията в трансформираното M_3 .

Таблица 7. Обобщени статистики за Модел 2

R	R ²	Изгладен R ²	Стандартна грешка на оценките
0,769	0,591	0,546	573,409

От таблица 8 става ясно, че линейният модел е адекватен на съществуващата значима връзка между диференцираното БВП и трансформираното M_3 с гаранционна вероятност близка до 100%.

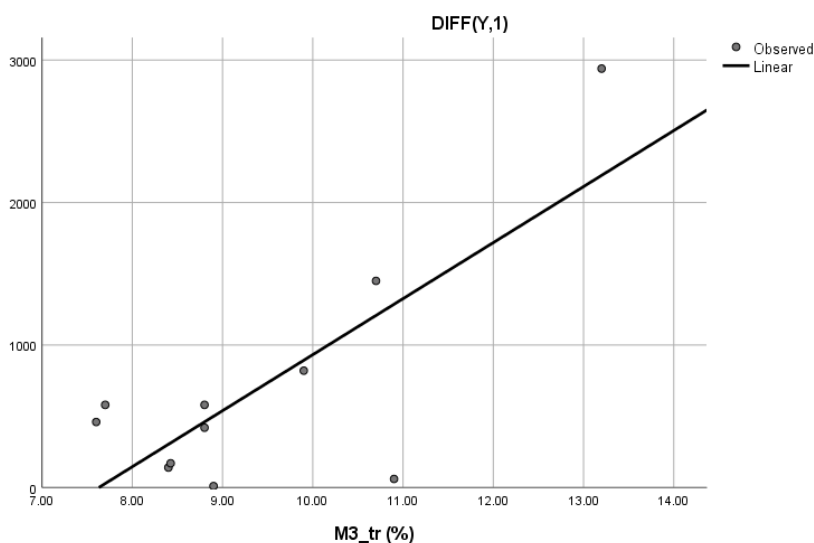
Таблица 8. ANOVA таблица за Модел 2

	Суми от квадрати	Степени на свобода	Суми от квадрати/ степени на свобода	F	Sig
Регресия	4279873,788	1	4279873,788	13,017	0,006
Остатъци	2959180,757	9	328797,862		
Общо	7239054,545	10			

От таблица 9 може да се провери значимостта на регресионните коефициенти. Старшият регресионен коефициент $\beta_2=393,216$ е статистически значим с гаранционна вероятност близка до 100%. Свободният член $\beta_1= -2999,916$ е статистически значим с гаранционна вероятност 98%.

Таблица 9. Коефициенти на Модел 2

	Нестандартизирани коефициенти		Стандартизирани коефициенти		Sig.
	B	Станд. грешка	Beta	t	
M3_tr (%)	393,216	108,988	0,769	3,608	0,006
(Constant)	-2999,916	1038,245		-2,889	0,018



Фигура 3. Модел 2: Линеен регресионен модел между диференцирания БВП и трансформираното M_3

Линията на регресия (таблица 9) има вида:

$$\widehat{diff_GDP}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 M3_i = -2999,916 + 393,216 M3_i$$

Старшият регресионен коефициент $\hat{\beta}_2=393,216$ показва, че при увеличаване на годишното изменение в $M3$ с 1% може да се очаква диференцираният БВП на глава от населението да се увеличи с 393,216 евро.

От фигура 3 се вижда, че Модел 2 описва по-добре данните от Модел 1.

Като сравним моделите се вижда, че и двата са адекватни. Модел 2 има по-висок коефициент на детерминация, но коефициенти на детерминация на двата модела не следва да се сравняват директно, тъй като зависимите променливи са различни. Също така, и при двата модела старшите регресионни коефициенти са статистически значими с гаранционна вероятност над 97%, но при Модел 1 свободният член е статистически незначим, докато при Модел 2 той е значим. Оттук може да се направи изводът, че моделът с диференцирания БВП (Модел 2) показва по-добри резултати и описва по-добре данните.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е изследвана връзката между номиналния брутен вътрешен продукт на България на глава от населението и годишното изменение в паричния агрегат „широки пари“. Използвани са данни от Националния Статистически Институт за периода 2011-2022 г.

4. Разгледани са разпределенията на променливите, откъдето се вижда, че стойността за 2014 г. за паричния агрегат „широки пари“ значително се отклонява от останалите стойности. Поради тази причина е направена трансформация на данните за паричния агрегат за съответната година.

5. Извършена е проверка за корелираност на данните за номиналния брутен вътрешен продукт и трансформирувания паричен агрегат „широки пари“ и от корелационната матрица става ясно, че има умерена корелация между променливите. При ниво на значимост 5%, коефициентът на корелация е значим.

6. Корелограмата на номиналния брутен вътрешен продукт и трансформирувания паричен агрегат „широки пари“ показва, че линейният тренд не е много добре изразен, наблюдава се цикличност, затова е направена трансформация на данните за номиналния брутен вътрешен продукт, като те са диференцирани.

7. Построени са 2 линейни регресионни модела, описващи връзката съответно между номиналния брутен вътрешен продукт и трансформирувания паричен агрегат „широки пари“ (Модел 1) и диференцирания номинален брутен вътрешен продукт и трансформирувания паричен агрегат „широки пари“ (Модел 2). Сравнителният анализ на двата модела показва, че моделът с диференцирания номинален брутен вътрешен продукт описва по-добре данните.

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024-ФПНО-02, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ИЗТОЧНИЦИ

- [1] Credit.bg, <<https://credirect.bg/finansov-rechnik/bruten-vytreshen-produkt>>.
- [2] Economy-Pedia.com, <<https://bg.economy-pedia.com/11030958-monetary-aggregates>>.
- [3] Казанджиева-Йорданова, И., 2014. Пари, банки, кредит. УНСС, София.
- [4] Bednarik, R., 2010. Money Supply and real GDP: The case of the Czech Republic, <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1539390>.
- [5] Национален Статистически Институт, < <https://www.nsi.bg/>>.

EUROPEAN OPTION PRICING WITH COLLATERAL UNDER THE HESTON MODEL⁹

Nedelina Nedeva, Student

Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: nedelina.1993@abv.bg

Assoc. Prof. Tihomir Gyulov, PhD

Department of Mathematics,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Phone: +359 82 888 489
E-mail: tgulov@uni-ruse.bg

Abstract: The paper studies the pricing of a European option with collateralization when the underlying asset satisfies the model of Heston. Following the framework of Piterbarg, V. (2010) a partial differential equation for the price of the option is derived.

Key words: Collateral, European Option, Black-Scholes-Merton Model, Heston Model.

ВЪВЕДЕНИЕ

Опциите са финансов инструмент от групата на т. нар. финансови деривати. Името им се дължи на факта, че тяхната стойност е получена (на англ. derive) или зависи от стойността на друга ценна книга или актив. Опцията е договор между две страни за покупка или продажба на на определен базов актив (underlying) на или преди дадена дата в бъдещето на определена цена, наречена страйк или цена на упражняване. При това едната страна, т.нар. продавач, има задължението да изпълни съответната транзакция, а другата страна – купувача – има само правото, без да е задължен, да я упражни.

В сферата на количествените финанси моделът на Блек-Шоулс (Black-Scholes) е най-известният модел за ценообразуване на опции поради своята простота и широко разпространено използване. Най-важният параметър при него е т.нар. волатилност, която е стандартното отклонение на краткосрочната възвръщаемост на актива. В модела на Блек-Шоулс волатилността е постоянна. Добре известно е обаче, че това предположение е в несъответствие с пазарните данни. Предполагамата волатилност, тоест тази нейна стойност, която след заместване във формулата на Блек-Шоулс, възпроизвежда съответната търгувана цена, зависи от цената на упражняване на опцията. Кривата, която описва тази зависимост, носи популярното име усмивка на волатилността. За да се преодолее това несъответствие, в литературата се разглеждат различни по-общи модели – със скокообразни случайни процеси, с локална волатилност, стохастична волатилност и др. При моделите със стохастична волатилност, тя, както подсказва името, също е случаен процес, като цената на базовия актив. Може би най-популярният от този клас е моделът на Хестон (Heston, S. (1993)), който е представен по-нататък в тази статия.

Друг параметър, който участва в модела на Блек-Шоулс, е безрисковият лихвен процент, тоест тази теоретична норма на възвръщаемост, която съответства на инвестиция със сигурен резултат. От съображения за безарбитражност безрисковият лихвен процент трябва да е единствен. В статията си Piterbarg, V. (2010) се аргументира, че в практиката е необходимо да се разглеждат едновременно няколко лихвени процента, в зависимост от вида на финансиране, към който се прилагат. Питербарг разглежда основно три от вида лихвени

⁹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 31.05.2024 в секция Финансова математика с оригинално заглавие на български език: ЦЕНА НА ЕВРОПЕЙСКИ ОПЦИИ С ОБЕЗПЕЧЕНИЕ ПО МОДЕЛА HESTON.

проценти: по обезпечението (collateral) на опцията, по необезпеченото финансиране на съответната институция, обикновено банка, и по репо сделки.

След глобалната финасова криза от 2007-2008 година обезпечаването на опциите от страна на продавача е почти задължителна норма, за разлика от периода преди кризата. То се извършва чрез различни механизми при борсовата търговия и извънборсовия пазар

• Борсово търгувани опции

Обезпечаването при борсовата търговия обичайно се извършва с помощта на т. нар. маржин сметки. Първоначално те са въведени, заради изискването за наличие на гаранционна сума при брокера (като депозит), който е необходим, за да се поддържат позициите отворени, когато се извършва търговия с капитал взет назаем. Ключовите стойности, с които се работи са първоначалният маржин и поддържащият маржин:

- Първоначален маржин - минималната сума, която се изисква за отваряне на позиция във фючърс или опция. Първоначалният маржин е специфичен за различните контракти, като зависи основно от волатилността на пазара, за да може да предпази както търговеца, така и брокера от потенциални загуби в резултат на неблагоприятни пазарни движения.
- Поддържащ маржин - минималната стойност на една сметка, която се изисква за поддържане на отворена позиция във фючърси или опции. Тя обикновено е по-малка от първоначалния маржин. Ако стойността на сметката падне под поддържащия маржин, брокерът информира продавача посредством обаждане (т.нар. margin call), за да доуточни желанието/отказа за запазване отворената позиция, като възстанови средствата по сметката до размера на първоначалния маржин.

По този се намалява рискът, продавачът на опцията да не изпълни задълженията си към купувача, и се гарантира, че купувачът на опцията ще бъде компенсирал при неизпълнение от страна на продавача.

• Извънборсово търгувани опции

Извънборсовият пазар (over-the-counter, накратко ОТС) е търговията с ценни книжа между два контрагента, извършвана извън официалните борси и без надзора на борсовия регулатор. Извънборсовата търговия се извършва на извънборсови пазари (децентрализирано място без физическо местоположение) чрез дилърски мрежи. За разлика от търговията на официалните борси, ОТС сделките не са само със стандартизирани артикули (напр. ясно дефиниран диапазон от количество и качество на продуктите). Освен това цените не винаги се публикуват публично.

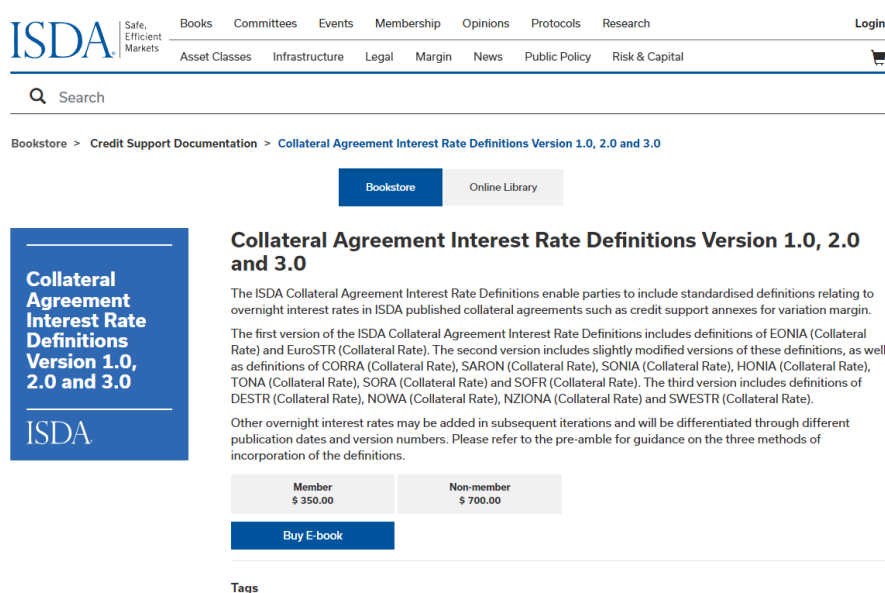
Извънборсовата търговия обаче е изложена на множество рискове. Един от най-значимите е **рискът от контрагента** – възможността другата страна да не изпълни задълженията си преди изпълнението или изтичането на договора. Затова и след финансовата криза 2007г.-2008г. се практикува обезпечаване на опциите като част от стандартния договор - Credit Support Annex (CSA), т. нар. Анекс за кредитна поддръжка. Това е документ, който определя условията за предоставяне на обезпечение от страните при сделки с деривати. Това е една от четирите части на стандартен договор или основно споразумение (Master Agreement), разработено от Международната асоциация за суапове и деривати (ISDA), с цел да определи и запише обезпечението, предлагано от двете страни в транзакция с деривати, за да се гарантира, че те могат да покрият всички загуби.

В практиката дадена институция финансира операциите си чрез няколко различни лихвени проценти. Piterbarg, V. (2010) разглежда следните:

- r_c – най – ниският лихвен процент, приет като безрисков, който се прилага върху обезпечението. Обичайно е да се прилага някой **овърнайт индексен процент**, вж. Фиг.1. Той е осредненият лихвен процент за заеми между банки на овърнайт пазара, например процентът на федералните фондове или SOFR за щатски долари, €STR (преди това EONIA) за евро или SONIA за стерлинги. В това число тук може да се разглежда като защита срещу внезапни неблагоприятни промени в краткосрочните

лихвени проценти и **суапа върху овърнайт индекс (OIS)**. По този начин финансовите институции ефективно защитават своите лихвени разходи, като фиксират лихвения процент, който ще платят за даден период, с помощта на суап - OIS. Този OIS лихвен процент на обикновено е считан за по-малко рисков от съответния междубанков лихвен процент (напр. EURIBOR или вече излезлият от употреба LIBOR), тъй като се контролира от централната банка и има ограничен риск от контрагента. Овърнайт индексът или по-общо OIS лихвеният процент (за по-дълги периоди от време) е обичайният лихвен процент, който се прилага за времето, през което обезпечението престоива в съответната маржин сметка.

- r_R – лихвен процент при репо сделки, при които заетите средства са осигурени с активи. При репо сделките, активите се продават за определена сума P , а след кратък период от време се купуват обратно за сума $P(1 + r_R)$. По този начин на практика се заема сума с лихвен процент r_R , като активите служат за гаранция по този заем. С оглед на това, лихвеният по репо сделки, може да е по-изгоден в сравнение с други начини за заем, тъй като лихвеният процент е по-нисък.
- r_f – неосигурено финансиране на сделки с деривативни инструменти (чрез отдел Treasury desk). Той е по-висок, тъй като съществува риск от неизпълнение. Определя се спрямо рейтинга на институцията (банката) и се определя като финансиране без обезпечение.



Фиг. 1. Определения за използваните лихвени проценти по обезпечение, ISDA.

Основната цел на настоящата статия е да изведем уравнение за цената на европейска опция, следвайки подхода на Питербарг, при условие, че процесът на цената на базовия актив и волатилността са както в модела на Хестон.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Моделите на Блек- Шоулс и Хестон

Моделът на Блек и Шоулс е основан на предположението, че поведението на цената S_t на базовия актив се описва чрез **геометрично Брауново движение**, което удовлетворява стохастичното диференциално уравнение

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

където μ е очакваната норма на възвръщаемост на акциите, а σ е гореспоменатата волатилност, която е стандартното отклонение на възвръщаемостта на цената на акциите за единица време t . Тук е важно да се подчертае, че за успешното реализиране на модела, е задължително допускането, че цената на опцията в даден момент t зависи само от t и цената

S , т.е. е функция $V(t, S)$, и тогава, вследствие на формулата на **Ито** и съображения за безарбитражност, се получава известното уравнение на Блек-Шоулз-Мертон

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

В случая на **кол опция**, т.е. такава, която дава правото да се закупи базовият актив на определена цена K , решението е

$$V = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (1)$$

където

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t},$$

при използването на означенията: V – цена на кол опцията, S – текуща (спот) цена на акцията, K – страйк (цена на упражняване), r – безрисков лих. %, T – момент на падеж, N – функцията на стандартното нормално разпределение.

Моделът на Блек-Шоулс предполага постоянна волатилност през целия живот на опцията. В действителност това често не е така, а варира в зависимост от нивото на търсене и предлагане. При модела на Хестон, от друга страна, волатилността на даден актив следва случаен процес, а не е постоянна. Това позволява на модела да улови клъстерирането на волатилността, реверсия към средната стойност и наблюдаваната усмивка на волатилността, което е критично за точното ценообразуване на опциите.

Цената на актива и дисперсията v на краткосрочната възвръщаемост при модела на Хестон са случайни процеси, определени чрез системата от стохастични диференциални уравнения

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} d\tilde{W}_t. \end{aligned} \quad (2)$$

Дисперсията v_t следва процес от вида на Cox-Ingersoll-Ross (CIR), който се прилага често във финансовата литература при моделирането на краткосрочния лихвен процент. Винеровите процеси W_t и $\tilde{W}_t$ са корелирани, с коефициент на корелация $\rho \in [-1, 1]$, т.е., без ограничение на общността можем да считаме, че

$$\tilde{W}_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} \widehat{W}_t, \quad (3)$$

където W_t и $\widehat{W}_t$ са независими Винерови процеси.

Хестон извежда следното частното диференциално уравнение (ЧДУ)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (\kappa(\theta - v_t) - \lambda(S, v, t)) \frac{\partial V}{\partial v} \\ - rV + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

където $\lambda(S, v, t)$ е т.нар. **цена на риска от волатилност**, която е независима от дадената опция. След това Хестон предлага допълнителното предположение, че $\lambda(S, v, t) = \lambda v$. За случая на европейската кол опция със страйк цена K и падеж в момент T решението на горното уравнение трябва да удовлетворява следните гранични условия:

$$\begin{aligned}
 V(S, v, T) &= \max(0, S - K), \\
 V(S, v, t) &= 0, \\
 \frac{\partial V}{\partial S}(\infty, v, t) &= 1, \\
 rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa \theta \frac{\partial V}{\partial S}(S, 0, t) - rV(S, 0, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, 0, t) &= 0, \\
 V(S, \infty, t) &= S.
 \end{aligned} \tag{5}$$

По аналогия с формулата на Блек-Шоулс, Хестон предлага решение във вида:

$$C(S, v, t) = SP_1 - KP(t, T)P_2, \tag{6}$$

където $P(t, T)$ е дисконтовият фактор, а P_1 и P_2 могат да бъдат изразени по следния начин

$$P_j(x, v, T; \ln[k]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[k]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Тук $f_j(x, v, T; \phi)$, $j = 1, 2$, са характеристичните функции на случайната променлива $x = \ln S$ при различни вероятностни мерки.

Основен резултат

Разглеждаме самофинансиращ се портфейл на продавача на дадена европейска опция V_1 върху базовия актив, в който рискът е елиминиран с помощта на подходящи позиции относно този актив и още един инструмент V_2 , зависещ от S_t и v_t , например друга опция. Нека тези позиции са: Δ_t единици от базовия актив и $\tilde{\Delta}_t$ опции от втория вид. Стойността Π_t на портфейла в даден момент е

$$\Pi_t = -V_1 + \tilde{\Delta}_t V_2 + \Delta_t S_t + \gamma_t,$$

където γ_t са налични или заети средства (пари), които са структурирани по различни сметки с различни лихвени проценти, $\gamma_t = C(t) + \gamma_t^R + \gamma_t^F$, където

- C е обезпечението, изисквано за заетите позиции относно двете опции; при него краткосрочният лихвен процент е r_C ;
- γ_t^R е позиция, която съответства на заети средства, обезпечени с базовия актив (напр. репо сделка) при лихвен процент r_R ,
- γ_t^F е позиция, която съответства на необезпечени заети средства r_F .

Ще считаме, че

$$r_C \leq r_R \leq r_F,$$

тоест доходността по обезпечението C е най-ниска, а най-висок е лихвеният процент r_F , при който дадената институция (банка) финансира операциите си без обезпечение от каквито и да е активи. Очевидно, при заемане за предпочитане е по-ниският лихвен процент r_R , затова $\gamma_t^R = -\Delta_t S_t$, тоест позицията по отношение на базовия актив се използва напълно за обезпечаване, а остатъкът от необходимите средства в портфейла се заемат при лихвен процент r_F . Тогава

$$\gamma_t^F = \Pi_t + V_1 - \tilde{\Delta}_t V_2 - C$$

Изменението в наличните средства е:

$$d\gamma_t = [r_C C(t) + r_F \gamma_t^F + r_R \gamma_t^R] dt = [r_C C(t) + r_F (\Pi_t + V_1 - \tilde{\Delta}_t V_2 - C) - r_R \Delta_t S_t] dt.$$

От друга страна, от лемата на Ито следва, че за $i = 1, 2$

$$dV_i(t, S, v) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_i}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_i}{\partial v^2} \right) \right) dt + \frac{\partial V_i}{\partial S} dS_t + \frac{\partial V_i}{\partial v} dv_t$$

и тогава от условието за самофинансиране

$$\begin{aligned}
 d\Pi_t &= -dV_1 + \tilde{\Delta}_t dV_2 + \Delta_t dS_t + \delta \Delta_t S_t dt + d\gamma_t \\
 &= -\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right)\right) dt \\
 &\quad + \tilde{\Delta}_t \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2}\right)\right) dt \\
 &\quad + [r_C C(t) + r_F(\Pi_t + V_1 - \tilde{\Delta}_t V_2 - C) + (\delta - r_R)\Delta_t S_t] dt \\
 &\quad + \left(-\frac{\partial V_1}{\partial S} + \tilde{\Delta}_t \frac{\partial V_2}{\partial S} + \Delta_t\right) dS_t + \left(-\frac{\partial V_1}{\partial v} + \tilde{\Delta}_t \frac{\partial V_2}{\partial v}\right) dv_t
 \end{aligned}$$

За да елиминираме коефициентите пред dS_t и dv_t , е необходим следният избор на $\tilde{\Delta}_t$ и Δ_t

$$\tilde{\Delta}_t = \frac{\partial V_1}{\partial v} / \frac{\partial V_2}{\partial v}, \quad \Delta_t = \frac{\partial V_1}{\partial S} - \tilde{\Delta}_t \frac{\partial V_2}{\partial S}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
 d\Pi_t &= -\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right)\right) dt \\
 &\quad + \tilde{\Delta}_t \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2}\right)\right) dt \\
 &\quad + [r_C C(t) + r_F(\Pi_t + V_1 - \tilde{\Delta}_t V_2 - C) + (\delta - r_R)\Delta_t S_t] dt
 \end{aligned}$$

След това, ако в началния момент $\Pi_0 = 0$, от предположението за безарбитражност следва, че $\Pi_t = 0$ за всяко t и тогава

$$\begin{aligned}
 &-\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right)\right) \\
 &\quad + \tilde{\Delta}_t \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2}\right)\right) \\
 &\quad + [r_C C(t) + r_F(V_1 - \tilde{\Delta}_t V_2 - C) + (\delta - r_R)\Delta_t S_t] = 0
 \end{aligned}$$

Ще предполагаме, че

$$C(t) = C_1 - \tilde{\Delta}_t C_2$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right) - (\delta - r_R)S_t \frac{\partial V_1}{\partial S} - r_F V_1 - (r_C - r_F)C_1\right) \\
 &\quad = \tilde{\Delta}_t \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2}\right) - (\delta - r_R)S_t \frac{\partial V_2}{\partial S} - r_F V_2 \right. \\
 &\quad \left. - (r_C - r_F)C_2\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right) - (\delta - r_R)S_t \frac{\partial V_1}{\partial S} - r_F V_1 - (r_C - r_F)C_1}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \\
 &= \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2}\right) - (\delta - r_R)S_t \frac{\partial V_2}{\partial S} - r_F V_2 - (r_C - r_F)C_2}{\frac{\partial V_2}{\partial v}}
 \end{aligned}$$

От тук следва, че отношението от всяка от страните на горното уравнение е едно и също, независимо от избора на опцията. Полагаме това отношение да е равно на $\hat{\lambda} - \kappa(\theta - v_t)$. Така получаваме уравнението за цената на европейска опция

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right) - (\delta - r_R) S_t \frac{\partial V_1}{\partial S} + (\kappa(\theta - v_t) - \hat{\lambda}) \frac{\partial V_1}{\partial v} - r_F V_1 - (r_C - r_F) C_1 = 0$$

Предполагаме, че (като в статията на Хестон): $\hat{\lambda}(t, S, v) := \lambda v$

След това за случая на кол опция ще представим цената във вида

$$V_{call} = S P_1 - K e^{-r_C(T-t)} P_2$$

където $P_1 = P_1(t, T, S, v)$ и $P_2 = P_2(t, T, S, v)$ удовлетворяват терминалното условие

$$P_{1,2} = P_{1,2}(T, T, S, v) = I_{S \geq K} = \begin{cases} 1, & \text{ако } S \geq K, \\ 0, & \text{ако } S < K. \end{cases}$$

Накрая ще изведем уравнения за $P_1 = P_1(t, T, S, v)$ и $P_2 = P_2(t, T, S, v)$. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{call}}{\partial t} &= S \frac{\partial P_1}{\partial t} - K r_C e^{-r_C(T-t)} P_2 - K e^{-r_C(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t}, & \frac{\partial V_{call}}{\partial S} &= P_1 + S \frac{\partial P_1}{\partial S} - K e^{-r_C(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial S}, \\ \frac{\partial V_{call}}{\partial v} &= S \frac{\partial P_1}{\partial v} - K e^{-r_C(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial v}, & \frac{\partial^2 V_{call}}{\partial S^2} &= 2 \frac{\partial P_1}{\partial S} + S \frac{\partial^2 P_1}{\partial S^2} - K e^{-r_C(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial S^2} \\ \frac{\partial^2 V_{call}}{\partial S \partial v} &= \frac{\partial P_1}{\partial v} + S \frac{\partial P_1}{\partial S \partial v} - K e^{-r_C(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial S \partial v}, & \frac{\partial^2 V_{call}}{\partial v^2} &= S \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - K e^{-r_C(T-t)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \\ S \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(2S \frac{\partial P_1}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + S \frac{\partial P_1}{\partial S \partial v} \right) + \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \right) - (\delta - r_R) \left(P_1 + S \frac{\partial P_1}{\partial S} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\kappa(\theta - v_t) - \lambda v) \frac{\partial P_1}{\partial v} - r_F P_1 \right) \\ &\quad - K e^{-r_C(T-t)} \left(r_C P_2 + \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(S^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v S \frac{\partial^2 P_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\delta - r_R) S \frac{\partial P_2}{\partial S} + (\kappa(\theta - v_t) - \lambda v) \frac{\partial P_2}{\partial v} - r_F P_2 \right) - (r_C - r_F) C = 0 \end{aligned}$$

Ако $C = \alpha V$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(2S \frac{\partial P_1}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + S \frac{\partial P_1}{\partial S \partial v} \right) + \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \right) - (\delta - r_R) \left(P_1 + S \frac{\partial P_1}{\partial S} \right) \\ + (\kappa(\theta - v_t) - \lambda v) \frac{\partial P_1}{\partial v} - r_F P_1 - (r_C - r_F) \alpha P_1 = 0 \\ r_C P_2 + \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(S^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial S^2} + 2\rho\sigma v S \frac{\partial^2 P_2}{\partial S \partial v} + \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \right) - (\delta - r_R) S \frac{\partial P_2}{\partial S} + (\kappa(\theta - v_t) - \lambda v) \frac{\partial P_2}{\partial v} \\ - r_F P_2 - (r_C - r_F) \alpha P_2 = 0 \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разгледан е моделът на Хестон за цената на европейска опция с обезпечение. Извели сме уравнение за тази цена при различни лихвени проценти по обезпечението и сме извели уравнение за случай на кол опция. Бъдеща задача е да се изведат аналогични на формулите (7) за P_1 и P_2 в разглеждания случай тук случай.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.

Piterbarg, V. (2010). Funding beyond discounting: Collateral agreements and derivatives pricing. *Risk*, 24, 97-02.

ON SYNCHRONIZATION OF NEURONAL DYNAMICS WITH SLOW INHIBITORY SYNAPSES II: ADDITIONAL ANALYTICAL RESULTS¹⁰

Teodor Georgiev, PhD Student

Differential Equations Doctoral Programme

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: t.georgiev@mg-babatonka.bg

Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD

Department of Mathematics

University of Ruse "Angel Kanchev"

E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

Abstract: In this paper, a study of the dynamics of two mutually coupled neurons connected via inhibitory synapses is presented. The main results concern the properties of the auxiliary functions that manage the coupling of the cells. It is a direct continuation of our previous paper [1]. The key assumption for the synchronization is the time delay between the activation of the presynaptic neuron and switching on the inhibition of the postsynaptic cell. In this paper we explore different cases for the initial values of the auxiliary functions and give results that apply for all of them.

Key words: inhibition, synchronous solution, relaxation oscillator, geometric singular perturbation theory.

ВЪВЕДЕНИЕ

В предходна статия [1] на авторите очертахме голямата роля за синхронизиране на мозъчните невронни динамики, която имат инхибиторните (потискащите) неврони. Психичните разстройства и някои неврологични заболявания се свързват с нарушения в предаването на нервни импулси от страна на инхибиторните неврони, [2, 4]. Изучаването на естествените невронни динамики намира приложение и в сферата на изкуствения интелект [3, 5], при който математически модели на невронни динамики симулират до голяма степен тези на естествените невронни динамики, [6, 7].

В тази статия, като продължение на работа [1], разглеждаме отново динамиката на два взаимно свързани неврона с потискащи синапси, описана с нелинейната динамична система:

$$v_i' = f(v_i, w_i) - s_i g_{syn}(v_i - v_{syn}), \quad w_i' = \epsilon g(v_i, w_i), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$x_i' = \epsilon \alpha (1 - x_i) H(v_j - \theta_v) - \epsilon \beta x_i, \quad s_i' = \phi(1 - s_i) H(x_i - \theta_{syn}) - \epsilon K s_i, \quad i \neq j. \quad (2)$$

където $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial f}{\partial w} < 0$, $\frac{\partial g}{\partial v} > 0$, $\frac{\partial g}{\partial w} < 0$, $v_i > v_{syn}$, $i = 1, 2$, $\phi, K, \alpha, \beta > 0$ са скоростни константи, H е функцията на Хевисайд, $\theta_{syn} > 0$ и θ_v са прагови константи. Малкият положителен параметър ϵ показва, че w се развива в бавен времеви мащаб. Със заместване $\tau = \epsilon t$ и след това с полагане $\epsilon = 0$ получаваме подсистемите, които описват клетките в мълчалива или активна фаза:

1) двете клетки са мълчаливи.

В този режим траекториите на клетките лежат върху левия клон на „кубичната“ повърхнина $f(v, w) - s g_{syn}(v - v_{syn}) = 0$. След подходящо изразяване и заместване (вж. [1]) получаваме системата:

¹⁰ Докладът е представен на семинар на катедра Математика на 19. 06. 2024 г. с оригинално заглавие на български език: ВЪРХУ СИНХРОНИЗИРАНЕТО НА НЕВРОННИ ДИНАМИКИ С БАВНИ ПОТИСКАЩИ СИНАПСИ II: ДОПЪЛНИТЕЛНИ АНАЛИТИЧНИ РЕЗУЛТАТИ.

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= G_L(w_i, s_i), \quad i = 1, 2. \\ \dot{x}_i &= -\beta x_i, \quad \begin{cases} \dot{s}_i = -K s_i & \text{ако } x_i < \theta_{syn} \\ s_i = 1 & \text{ако } x_i > \theta_{syn} \end{cases} \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

където $G_L(w, s) < 0$.

2) двете клетки са активни.

В този режим траекториите на клетките лежат върху десния клон на „кубичната“ повърхнина, а системата придобива вида:

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= G_R(w_i, s_i), \quad i = 1, 2. \\ \dot{x}_i &= (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_i \right), \quad \begin{cases} \dot{s}_i = -K s_i & \text{ако } x_i < \theta_{syn} \\ s_i = 1 & \text{ако } x_i > \theta_{syn} \end{cases} \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

където $G_R(w, s) > 0$.

Целта на настоящата работа е да се представят свойствата на помощните функции x_1, x_2 , чрез които се осъществява свързването на двете клетки. Разгледани са различни случаи в зависимост от началните стойности на x_1 и x_2 .

ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Означаваме с $w = w_L(s)$ кривата на скоковете напред във фазовата равнина на бавните променливи (w, s) , съответстваща на кривата на минимумите върху левия клон на „кубичната“ повърхнина $f(v, w) - s g_{syn}(v - v_{syn}) = 0$, а с $w_R(1)$ точката за скок назад, съответстваща на максимума върху десния клон на „кубичната“ повърхнина при $s = 1$.

Предполагаме, че $g_v = 0$ близо до десните клонове на (1) за $s \in [0, 1]$ и $K < a_-$, където $a_- = \min \left(-\frac{\partial g}{\partial w} \right) > 0$ върху левия клон на $f(v, w) - s g_{syn}(v - v_{syn}) = 0$ за $s \in [0, 1]$. Доказахме в Лема 1 на [1], че при това условие $\lambda = w'_L(s) < 0$ за $s \in [0, 1]$.

Нека както в [1], при $\tau = 0$ клетка 1 е в точката $w_R(1)$ и първа навлиза в мълчалива фаза, а клетка 2 е в активна фаза, като и двете клетки в началния момент са с максимално потискане $s_i(0) = 1, i = 1, 2$. Означаваме с δ времето, необходимо на клетка 2 да достигне точката за скок назад от началната позиция върху десния клон на $f(v, w) - g_{syn}(v - v_{syn}) = 0$, $\delta_x = |x_1(0) - x_2(0)|$; t_i е моментът, в който $x_i(\tau) = \theta_{syn}$, което означава че след t_i траекторията на клетка i лежи в мълчаливата фаза и нейното потискане s_i намалява. Нека T_i е моментът, в който траекторията на клетка i достигне кривата $w_L(s)$ за скок напред, а T_0 е моментът, в който някоя от клетките първа достигне точката за скок назад $w_R(1)$. За началните условия предполагаме

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} > x_i(0) > \theta_{syn}, \quad i = 1, 2.$$

Твърдение 1. (i) Ако $x_2(0) < x_1(\delta)$, то $t_2 < t_1$ и $t_1 - t_2 > \delta$;

(ii) Ако $x_1(\delta) < x_2(0) < x_1(\delta)e^{\beta\delta}$, то $t_2 < t_1$ и $t_1 - t_2 < \delta$;

(iii) Ако $x_1(\delta)e^{\beta\delta} < x_2(0) < x_1(\delta)e^{2\beta\delta}$, то $t_2 > t_1$ и $t_2 - t_1 < \delta$;

(iv) Ако $x_2(0) > x_1(\delta)e^{2\beta\delta}$, то $t_2 > t_1$ и $t_2 - t_1 > \delta$.

Доказателство. Неравенствата следват непосредствено от зададената система, откъдето можем да изразим

$$t_1 = \delta + \frac{1}{\beta} \ln \frac{x_1(\delta)}{\theta_{syn}} > \delta, \quad t_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{x_2(0)}{\theta_{syn}}. \quad (5)$$

Твърдение 2. (i) Ако $x_1(\delta) < x_2(0)$, то $0 < t_2 - t_1 + \delta < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}}$;
 (ii) Ако $t_1 < t_2$, то

$$\delta < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}} .$$

Доказателство. (i) От (5) имаме $t_1 - t_2 < \delta$, следователно

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2 - \delta| &= (\delta - t_1) + t_2 = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{x_2(0)}{x_1(\delta)} \right) = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{(x_2(0) - x_1(0)) - (x_1(\delta) - x_1(0))}{x_1(\delta)} \right) \\ &< \frac{1}{\beta} \frac{(x_2(0) - x_1(0)) - (x_1(\delta) - x_1(0))}{x_1(\delta)} < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}} . \end{aligned}$$

(ii) Неравенството следва непосредствено от (i).

Твърдение 3. Следните неравенства са еквивалентни.

$$T_2 - T_1 < t_1 - t_2 \Leftrightarrow x_2(T_1) < x_1(T_2) \Leftrightarrow s_2(T_1) < s_1(T_2)$$

При това,

(i) ако $t_2 < t_1$ и $x_2(T_1) > x_1(T_2)$, то $T_1 < T_2$ и $0 < t_1 - t_2 < T_2 - T_1$;
 (ii) ако $t_1 < t_2$ и $x_2(T_1) < x_1(T_2)$, то $T_2 < T_1$ и $0 < t_2 - t_1 < T_1 - T_2$.

Доказателство. $x_1(T_2) = \theta_{syn} e^{-\beta(T_2 - t_1)}$, $x_2(T_1) = \theta_{syn} e^{-\beta(T_1 - t_2)}$

$$\frac{x_1(T_2)}{x_2(T_1)} = e^{-\beta((T_2 - T_1) - (t_1 - t_2))}$$

$$(T_2 - T_1) - (t_1 - t_2) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{x_2(T_1)}{x_1(T_2)} ,$$

което показва, че първото и второто неравенство са еквивалентни.

Освен това от

$$T_2 - T_1 = t_1 - t_2 + \frac{1}{\beta} \ln \frac{x_2(T_1)}{x_1(T_2)}$$

следва, че:

1) ако $t_2 < t_1$ и $x_2(T_1) > x_1(T_2)$, то $T_1 < T_2$ и $0 < t_1 - t_2 < T_2 - T_1$;
 2) ако $t_1 < t_2$ и $x_2(T_1) < x_1(T_2)$, то $T_2 < T_1$ и $0 < t_2 - t_1 < T_1 - T_2$.

От $x_1(t_1) = x_2(t_2) = \theta_{syn}$ следва

$$s_1(T_2) = e^{-K(T_2 - t_1)} ; \quad s_2(T_1) = e^{-K(T_1 - t_2)}$$

$$\frac{s_1(T_2)}{s_2(T_1)} = e^{-K((T_2 - T_1) - (t_1 - t_2))}$$

$$(T_2 - T_1) - (t_1 - t_2) = \frac{1}{K} \ln \frac{s_2(T_1)}{s_1(T_2)} ,$$

което показва, че първото и третото неравенство са еквивалентни.

Забележка. Времената T_1 и T_2 се определят от система (3) и кривата на скоковете напред $w_L(s)$, т.е. те зависят от нелинейните функции в модела.

Твърдение 4. Нека t_i^* е моментът, в който x_i отново пресече θ_{syn} , т.е. $x_i(t_i^*) = \theta_{syn}$, $t_i < t_i^* < T_0$, $i = 1, 2$. Тогава:

(i) ако $T_1 < T_2$ и $x_2(T_1) > x_1(T_2)$, то $t_1^* > t_2^*$ и $t_1^* - t_2^* > T_2 - T_1 > 0$;
 (ii) ако $T_2 < T_1$ и $x_2(T_1) < x_1(T_2)$, то $t_1^* < t_2^*$ и $t_2^* - t_1^* > T_1 - T_2 > 0$.

Доказателство.

$$t_1^* = T_2 + \frac{1}{\alpha + \beta} \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn}} \right), \quad t_2^* = T_1 + \frac{1}{\alpha + \beta} \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn}} \right)$$

$$(T_2 - T_1) - (t_1^* - t_2^*) = \frac{1}{\alpha + \beta} \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)} \right)$$

Това значи, че

$$T_2 - T_1 > t_1^* - t_2^* \quad \Leftrightarrow \quad x_2(T_1) < x_1(T_2)$$

и горните неравенства следват.

Твърдение 5. Нека $(\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn} \right) > 1$. Тогава

$$|t_1^* - t_2^*| \leq |T_2 - T_1| + |x_2(T_1) - x_1(T_2)|.$$

Доказателство. Ако $x_1(T_2) < x_2(T_1)$, то

$$\left| \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)} \right) \right| = \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)} \right) = \ln \left(1 + \frac{x_2(T_1) - x_1(T_2)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)} \right)$$

$$\leq \frac{|x_2(T_1) - x_1(T_2)|}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn}}.$$

Ако $x_1(T_2) > x_2(T_1)$, то

$$\left| \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)} \right) \right| = \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)} \right) = \ln \left(1 + \frac{x_1(T_2) - x_2(T_1)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)} \right)$$

$$\leq \frac{|x_2(T_1) - x_1(T_2)|}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn}}.$$

Това означава, че от

$$t_1^* - t_2^* = (T_2 - T_1) + \frac{1}{\alpha + \beta} \ln \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2)}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1)} \right)$$

следва

$$|t_1^* - t_2^*| \leq |T_2 - T_1| + \frac{|x_2(T_1) - x_1(T_2)|}{(\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \theta_{syn} \right)} \leq |T_2 - T_1| + |x_2(T_1) - x_1(T_2)|.$$

Теорема 1. Нека $> (2M^2 + 3M)/\theta_{syn}$, където $M = \frac{\max|G_L|}{\min|G_L|}$ в компактно множество $0 \leq s \leq 1, w_L(s) \leq w \leq w_R(1)$. Нека още $t_1 < t_2$. Тогава

$$(i) \quad |T_1 - T_2| < \frac{\delta_x}{5};$$

$$(ii) \quad |x_1(T_2) - x_2(T_1)| < \frac{\delta_x}{2}, \quad |x_1(T_0) - x_2(T_0)| < \frac{\delta_x}{2}.$$

Доказателство (i).

Случай 1: Нека $t_2 - t_1 < \delta$. Първо ще покажем, че $w_1(t_1) < w_2(t_2)$ (Фигура 1). От $\dot{w}_1 = G_L(w_1, 1)$ за $0 < \tau < t_1$, $\dot{w}_2 = G_L(w_2, 1)$ за $\delta < \tau < t_2$, $w_1(0) = w_2(\delta) = w_R(1)$ и $t_2 - t_1 < \delta$ следва $w_2(\tau) = w_1(\tau - \delta)$ за $\delta \leq \tau \leq t_2$ и в частност

$$w_2(t_2) = w_1(t_2 - \delta) > w_1(t_1),$$

понеже в този режим w_1 е намаляваща функция.

От (3) следва $w_1(T_1) < w_2(T_2)$ и от $\lambda = w'_L(s) < 0$ за $s \in [0, 1]$ стигаме до $s_1(T_1) > s_2(T_2)$. От $t_1 < t_2$ следва $s_1(\tau) < s_2(\tau)$ за $t_1 < \tau \leq T_1$, в частност $s_1(T_1) < s_2(T_1)$. Така $s_2(T_2) < s_1(T_1) < s_2(T_1)$, следователно $T_1 < T_2$, понеже $s_2(\tau)$ е намаляваща функция в този интервал.

За да докажем $T_2 - T_1 < \frac{\delta_x}{5}$, разглеждаме образа на кривата на скоковете $w_L(s)$ в мълчалива фаза назад във времето по продължение решенията на $\dot{w} = G_L(w, s)$, $\dot{s} = -Ks$ в позицията на клетка 1 в момент t_1 . В Лема 4 на [1] доказахме, че наклонът на кривата на минимумите $w_L(s)$ остава отрицателен за всяко $\tau < 0$. Нека t_3 е моментът, в който клетка 2 би скочила към активна фаза, ако клетка 1 скочеше напред в момент t_1 , т.е. t_3 е такова, че $t_1 < t_3$ и

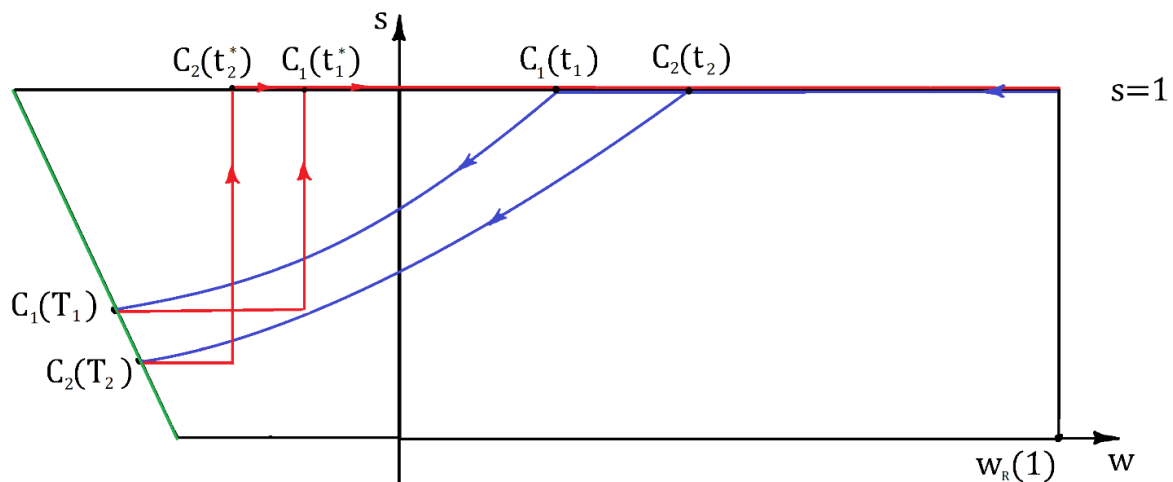
$$T_2 - T_1 = t_3 - t_1.$$

Ако $t_3 \leq t_2$, то от Твърдение 2 (ii) имаме $T_2 - T_1 \leq \delta < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}}$ и неравенството следва. Ако обаче $t_2 < t_3$, имаме $\delta < t_1 < t_2 < t_3$ и

$$0 < w_2(t_2) - w_2(t_3) < w_2(t_2) - w_1(t_1) = w_1(t_2 - \delta) - w_1(t_1),$$

понеже $w_2(t_3) > w_1(t_1)$ заради отрицателния наклон на кривата на скоковете, и $t_2 - \delta < t_1$. Така

$$t_3 - t_2 < M(t_1 - t_2 + \delta),$$



Фигура 1 Траектории на клетките във фазовата равнина (w, s) . В мълчалива фаза движението е означено в синьо, а в активна фаза – с червено. В зелено е обозначена кривата за скок напред $w = w_L(s)$

следователно

$$T_2 - T_1 = t_3 - t_1 = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_1) < M\delta - (M - 1)(t_2 - t_1) < M\delta < \frac{\delta_x}{2M + 3} < \frac{\delta_x}{5}.$$

Случай 2: Нека $t_2 - t_1 > \delta$. Тогава $w_2(t_2) < w_1(t_1)$, тъй като $w_2(\tau) = w_1(\tau - \delta)$ за $\delta \leq \tau \leq t_1 + \delta$, $t_2 > t_1 + \delta$ и w_2 е намаляваща функция в този режим. И щом при $s = 1$ е изпълнено $w_2(t_2) < w_1(t_1)$, то за всяко $s < 1$ (докато клетките са в мълчалива фаза, удовлетворяващи системата $\dot{w} = G_L(w, s)$, $\dot{s} = -Ks$) клетка 2 ще е по-наляво от клетка 1. В

частност при $s = s_2(T_2)$ клетка 2 ще е по-наляво от клетка 1, следователно $s_2(T_2) > s_1(T_1)$ (и съответно $w_2(T_2) < w_1(T_1)$).

От Твърдение 2 имаме $\delta < t_2 - t_1 < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}}$. Както с Случай 1, пренасяме кривата на скоковете назад във времето по продължение решенията на $\dot{w} = G_L(w, s)$, $\dot{s} = -Ks$ в позицията на клетка 2 в момент t_2 . Означаваме с t_3 момента, в който клетка 1 би скочила към активна фаза, ако клетка 2 скочеше напред в момент t_2 .

- 1) Ако $T_1 < T_2$, от $s_2(T_2) > s_1(T_1)$ и $s_2(\tau) = s_1(\tau + t_1 - t_2)$ за $t_2 \leq \tau \leq T_2$ имаме $s_2(T_2) = s_1(T_2 + t_1 - t_2) > s_1(T_1)$.

От друга страна, понеже s_1 е намаляваща функция, то

$$T_2 + t_1 - t_2 < T_1 \Leftrightarrow T_2 - T_1 < t_2 - t_1 < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}} < \frac{\delta_x}{5}.$$

- 2) Ако $T_2 < T_1$, то $t_1 < t_2 < t_3$ и $T_1 - T_2 = t_3 - t_2$.

Тъй като точките $(w_2(t_2), s_2(t_2))$ и $(w_1(t_3), s_1(t_3))$ лежат на пренесената крива на скоковете, то съществува $\lambda_3 < 0$, такова че

$$w_2(t_2) - w_1(t_3) = \lambda_3(s_2(t_2) - s_1(t_3)) = \lambda_3(1 - s_1(t_3)) < 0.$$

По този начин

$$0 < w_1(t_1) - w_1(t_3) < w_1(t_1) - w_2(t_2) = w_2(t_1 + \delta) - w_2(t_2).$$

Така $t_3 - t_1 < M(t_2 - t_1 - \delta)$ и

$$T_1 - T_2 = t_3 - t_2 < t_3 - t_1 < M(t_2 - t_1 - \delta) < \frac{M\delta_x}{\beta \theta_{syn}} < \frac{\delta_x}{2M+3} < \frac{\delta_x}{5}.$$

Случай 3: Нека $t_2 - t_1 = \delta$. Тогава $w_1(t_1) = w_2(t_2)$ и двете клетки се движат по една и съща траектория в мълчалива фаза с разлика във времето, равна на δ . Така

$$T_2 - T_1 = t_2 - t_1 = \delta < \frac{\delta_x}{\beta \theta_{syn}} < \frac{\delta_x}{5}.$$

Доказателство (ii). От $x_1(T_2) = x_1(\delta)e^{-\beta(T_2-\delta)}$; $x_2(T_1) = x_2(0)e^{-\beta T_1}$ имаме

$$\begin{aligned} |x_1(T_2) - x_2(T_1)| &\leq |x_1(\delta)e^{-\beta(T_2-\delta)} - x_2(0)e^{-\beta(T_2-\delta)}| + |x_2(0)e^{-\beta(T_2-\delta)} - x_2(0)e^{-\beta T_1}| \\ &\leq e^{-\beta(T_2-\delta)}|x_1(\delta) - x_2(0)| + x_2(0)|e^{-\beta(T_2-\delta)} - e^{-\beta T_1}| \\ &\leq e^{-\beta\xi}(\delta_x) + x_2(0)\beta e^{-\beta\xi}|T_2 - T_1 - \delta|, \end{aligned}$$

където $\xi = \min(T_2 - \delta, T_1)$. От Твърдение 2 и (i) заключаваме

$$|x_1(T_2) - x_2(T_1)| < \frac{\delta_x}{2},$$

стига $e^{-\beta\xi}(5 + 2\beta) < 1$.

Аналогично, от

$$\begin{aligned} x_1(T_0) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2) \right) e^{-(\alpha+\beta)(T_0-T_2)} \\ x_2(T_0) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1) \right) e^{-(\alpha+\beta)(T_0-T_1)} \end{aligned}$$

получаваме

$$\begin{aligned}
 & |x_1(T_0) - x_2(T_0)| \\
 & \leq \left| \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_2(T_1) \right) e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2) \right) e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_1)} \right| \\
 & \quad + \left| \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2) \right) e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2) \right) e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_2)} \right| \\
 & = e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_1)} |x_1(T_2) - x_2(T_1)| + \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2) \right) |e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_1)} - e^{-(\alpha + \beta)(T_0 - T_2)}| \\
 & \leq \frac{\delta_x}{2} e^{-(\alpha + \beta)\eta} + \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - x_1(T_2) \right) (\alpha + \beta) e^{-(\alpha + \beta)\eta} |T_2 - T_1|,
 \end{aligned}$$

където $\eta = \min(T_0 - T_1, T_0 - T_2)$. Така, ако $e^{-(\alpha + \beta)\eta}(1 + \alpha + \beta) < 1$, то

$$|x_1(T_0) - x_2(T_0)| < \frac{\delta_x}{2}. \square$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази статия е разгледан математически модел на два невронни осцилатора, свързани чрез бавни потискащи синапси. Изучени са свойствата на помощните функции x_1, x_2 , чрез които се осъществява свързването на двата неврона. Намерено е друго множество за параметрите в модела, различно от работа [1], в което е доказано сближаване на двете клетки в зависимост от началните условия. Големият брой константи, произлизащи от биологичния смисъл на модела, води до необходимостта да се търсят различни режими на параметрите, в които моделът следва да се разглежда прецизно и поотделно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2024-ФПНО-03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Georgiev T., J. Chaparova, On Synchronization of Neuronal Dynamics with Slow Inhibitory Synapses, Proceedings of University of Ruse - 2023, volume 62, book 6.5, 37-45.
- [2] G. Buzsáki, Rhythms of the Brain, Oxford University Press, 2006.
- [3] B. Lu, H. Jiang, C. Hu, A. Abdurahman, Synchronization of hybrid coupled reaction-diffusion neural networks with time delays via generalized intermittent control with spacial sampled-data, *Neural Networks*, 105 (2018) 75-87.
- [4] A. Wnuk, How Inhibitory Neurons Shape the Brain's Code, BrainFacts.org, 2021.
- [5] Slavova, A., Cellular Neural Networks: Dynamics and Modelling, Kluwer Academic Publisher, 2003.
- [6] D. Terman, N. Kopell, A. Bose, Dynamics of two mutually coupled slow inhibitory neurons, *Physica D* 117 (1998), 241-275.
- [7] D. Golomb, X.-J. Wang, J. Rinzel, Synchronization properties of spindle oscillations in a thalamic reticular nucleus model, *Journal of Neurophysiology*, 72 (1994).

ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DEVELOPING A SYSTEM FOR INTERACTION BETWEEN THE PLAYER AND THE GAME ENVIRONMENT IN THE GAME ETERNAL VIGIL¹¹

Serkan Sadulov, Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 87 892 5635
E-mail: Ssadulov@uni-ruse.com

Mustafa Mustafov, Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 89 056 9310
E-mail: s216259@stud.uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Kamelia Shoilekova, PhD – Supervisor

Department of Informatics and Information Technologies,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 88 785 9224
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

Abstract: This paper provides an in-depth analysis of innovative battle system design strategies in video game development, focusing on the use of advanced algorithms and industry best practices. Research focuses on creating dynamic and engaging player-versus-environment encounters by exploring the implementation of various algorithms, such as finite state machines and behavior trees, to design responsive and intelligent behavior of non-player characters (NPCs). The study carefully examined the theoretical basis and practical application of these algorithms in the development of combat mechanisms with the aim of improving player immersion and difficulty. Using modern programming techniques and computational models, this paper presents a holistic approach to building combat systems that facilitate complex interactions and facilitate immersive gaming experiences.

Key words: Video game development, Combat system, Algorithms, Player versus environment, Dynamic interactions, Colliders.

REFERENCES

- [1] Садулов С., М. Мустафов, К. Шойлекова (2023). Използване на А* алгоритъма в Eternal Vigil Научни трудове на Русенски университет, Том 62, серия 6.1, 52-56, ISSN: 2603-4123
- [2] GOLDSTONE, Will. Unity game development essentials. Packt Publishing Ltd, 2009.
- [3] HOCKING, Joseph. Unity in action: multiplatform game development in C. Simon and Schuster, 2022.
- [4] BLACKMAN, Sue. Beginning 3D Game Development with Unity 4: All-in-one, multiplatform game development. Apress, 2013.
- [5] MÜLLER-HANNEMANN, Matthias; SCHIRRA, Stefan. Algorithm Engineering. Springer, 2001.

¹¹ This Report is presented on a Student Scientific Session on 31 May 2024 in the “Informatics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper“ Cristal Prize’24, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).

- [6] GRAHAM, Ross; MCCABE, Hugh; SHERIDAN, Stephen. Pathfinding in computer games. *The ITB Journal*, 2003, 4.2: 6.
- [7] Lawande, S.R.; Jasmine, G.; Anbarasi, J.; Izhar, L.I. A Systematic Review and Analysis of Intelligence-Based Pathfinding Algorithms in the Field of Video Games. *Appl. Sci.* 2022, 12, 5499. <https://doi.org/10.3390/app12115499>.
- [8] AHEARN, Luke. 3D game textures: create professional game art using photoshop. AK Peters/CRC Press, 2016.
- [9] S. Wang, Z. Mao, C. Zeng, H. Gong, S. Li and B. Chen, "A new method of virtual reality based on Unity3D," *2010 18th International Conference on Geoinformatics*, Beijing, China, 2010, pp. 1-5, doi: 10.1109/GEOINFORMATICS.2010.5567608.

GPASSISTANT MEDICAL SOFTWARE¹²

Bozhidar Dachev, Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 87 8728422
E-mail: s226258@stud.uni-ruse.bg

Prof. Katalina Grigorova, PhD – Supervisor

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse "Angel Kanchev"
Tel.: +359 89 9458152
E-mail: kgrigorova@uni-ruse.bg

Abstract: GPAssistant is an innovative medical software that allows automation of various activities of the general practitioner. The software enables doctors to receive advice for diagnosis by entering symptoms of a given patient and recommendations for treatment with appropriate medications. Additionally, it has the capability to track whether a patient has allergies and, if so, to alert the doctor about it. Other functionalities of the software include scheduling patient appointments on specific dates and times when they request it on the platform, aiming to optimize the time of both patients and general practitioners. It also conducts automated campaigns for disease prevention and timely detection, as well as automatically informs patients about mandatory vaccinations, immunizations, and revaccinations.

Key words: Advisor, Campaigns, Reminder, General practitioner, Patient.

INTRODUCTION

In today's world, various software products designed for use in different medical fields are constantly being created and offered. In the development of medical software, the Personalized Information System at the National Health Insurance Fund was examined, which allows every general practitioner in Bulgaria to access and update patient data. The personalized information system is a system where the personal doctor enters data about allergies, immunizations, medical procedures, personal information of the respective patient, and others. After a thorough review of the system used by doctors, it was considered how to improve the system by including functionalities that are necessary for doctors and are currently missing. Although there are many developed medical software products in various specific areas of medicine, we will focus on what can be improved in the software intended for general practitioners. Most medical software products intended for general practitioners have similar functionalities such as registering and logging patients and medical staff. Other similar functionalities include adding diagnoses to the patient's electronic prescription book, issuing electronic referrals for examinations, receiving examinations electronically, and others. An example of such software is the one by Niset Ltd. In Bulgaria, the most common medical software products are Hippocrates GP and Gamma CodeMaster. Upon reviewing and evaluating other similar medical software products, it was concluded that they lack functionalities such as providing advice to the doctor when symptoms are entered to make suggestions for the illness and offer treatment. Another drawback is the lack of automatic reminders for mandatory vaccinations, immunizations, and revaccinations, which complicates the work of doctors. In Bulgaria, there is a tendency for lack of awareness about various diseases and the absence of campaigns to inform patients about timely examinations and treatments. This, in turn, leads to delayed disease detection, precisely due to the lack of such campaigns. In our software, we have developed campaigns to inform patients about preventive check-ups and timely detection of various diseases. Another problem with existing medical software products is the lack of planning

¹² The report was presented at the student scientific session of the University of Rousse "Angel Kanchev" SNS'2024 on May 9 2024 in the "Informatics" section.

and organizing patient appointments, leading to accumulation and overloading of general practitioners. In the new software, we have developed a scheduler that monitors all patients daily and, upon receiving appointment requests, schedules the day and time for the general practitioner to see the patient. Despite the presence of a large number of developments with medical themes, there is still a lack of quality medical software, as doctors who are users of such software rarely participate in its design. The motivation for creating this software is based on the fact that during a conversation with some general practitioners, they told about the problems and shortcomings of their software, which delay patients during examinations and the lack of automated activities to facilitate the work of doctors. This, in turn, leads to lower efficiency and a risk of errors in patient care. This is the main motivation for developing the GPAssistant medical software, which is a system for semi-automated management of medical records to support the work of general practitioners. Another motivating factor is the personal belief that doctors are indeed very busy and cannot do everything on their own, and also that there is a lack of prevention any information campaigns for various diseases or their early detection in Bulgaria.

EXPOSITION

Doctor advisor

This functionality aims to assist the work of the general practitioner by providing advice on diagnosing based on the symptoms presented by the patient. Various symptoms can be entered, and it is not necessary to fill in all the symptom fields (Fig. 1). To provide more accurate recommendations, the patient's unique civil registration number (UCRN) must be entered. Patient data is available in the system, and entering only the UCRN is sufficient. After pressing the 'Generate Recommendation' button, a new window opens with suggestions for possible illnesses. The more symptoms entered, the more accurate the information provided about the possible illness. For example, if a person complains to the doctor of symptoms such as severe wet cough, a temperature of around 38 degrees Celsius, shivering, muscle aches, nausea, and headache, the general practitioner should also enter the duration of the illness and the start date in the 'Additional information for the patient' field, after which they will have a better idea of the type of illness and will propose several treatments. If it is found in the database that the patient is allergic to certain substances, then under the proposed treatments, the substances to which the patient is allergic will be highlighted in red. Artificial intelligence, which is self-learning, is used in the generation process. There is an option to delete entered symptoms.

The screenshot shows a web interface for a medical advisor. On the left, under the heading "Please enter patient symptoms:", there are eight input fields labeled "Symptom 1:" through "Symptom 8:". Below these fields are two buttons: "GENERATE A RECOMMENDATION" and "DELETE A RECOMMENDATION". On the right, under the heading "Patient information", there are three input fields: "Name *" (with the example "e.g., Simeon Trifonov Penchev"), "Unified Citizen Identification Number" (with the example "e.g., 0123456789"), and "Additional information for the patient" (with the placeholder "Enter text here"). At the bottom of the interface, there is a green footer bar containing a "Let's Chat!" button, copyright information "© 2024 by Medical Clinic. Powered and secured by INNOVATION TECHNOLOGY", address "500 Terry Francine St, San Francisco, CA 94158", phone number "Tel: 0877678888", social media icons for Facebook and Twitter, and a "Book Now" button.

Fig. 1. Entering a symptoms

Allergies

This functionality (Fig. 2) generates reports on entered allergies to various substances in medications. The functionality is again based on artificial intelligence. When entering the patient's name and UNCR and pressing the 'Look for allergies' button, it displays the available information about the patient's allergies. If the names of prescribed medications are also entered, it will check if the patient has allergies to the corresponding substances and will match the patient's allergies with the prescribed medications. If the patient is allergic to a substance in the medication, it will suggest another medication that matches the patient's condition and does not trigger allergies.

Appointment scheduling

In the Appointment scheduling section (Fig. 3), a calendar and corresponding available time slots are provided, which the patient can select after registration. There is a functionality that allows for an online appointment with the general practitioner. The patient can choose whether to meet with their doctor in person or have an online appointment. Time slots are monitored in real-time, and there is no possibility for two patients to select the same time slot.

Prevention and information campaigns

This functionality allows the doctor to create campaigns targeting a specific audience and send information to all registered patients who belong to the target group to receive it. By pressing the 'Send for all patients' button (Fig. 4), all registered patients receive information about the campaign, and the target group can be tested or screened. If the doctor has never sent such a campaign, it is automatically sent to all registered patients from the respective target group. If the doctor has sent one campaign but not another, the other campaign will be automatically sent to the corresponding group. New campaigns are uploaded every two to four weeks by the individuals maintaining the medical software, and there is also the option for the doctor to upload such campaigns.

Fig. 2. Allergies

< Back

Service Name

Check out our availability and book the date and time that works for you

Filter by: Location (All) | Staff Member (All)

Select a Date and Time

Eastern European Summer Time (GMT+3)

April 2024

Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

1 2 3 4 5 6 7

8 9 10 11 12 13 14

15 16 17 18 19 20 21

22 23 24 25 26 27 28

29 30

Saturday, April 20

12:00 am 1:00 am

2:00 am 3:00 am

4:00 am 5:00 am

6:00 am 7:00 am

8:00 am 9:00 am

[Show all sessions](#)

Service Details

Available Online

Service Name

Location

Staff

Duration

Price

Next

Fig. 3. Appointment scheduling

500 Terry Francine Street, San Francisco, CA 94158

+359877678888

GPAssistant Medical Software

DOCTOR ADVISOR ALLERGIES APPOINTMENT SCHEDULING PREVENTION CAMPAIGNS VACCINATION REMINDERS More

PREVENTION CAMPAIGNS

Tests for the presence of tumors

Get tested for free until June 20, 2024.

Send for all patients

Diabetes tests

Get tested for free until April 05, 2024.

Send for all patients

Spinal deformity tests

Get tested for free until September 19, 2025.

Send for all patients

Let's Chat!

Book Now

Fig. 4. Prevention and information campaigns

Vaccination reminder

The software includes the option for patients to receive an email reminders for vaccinations, immunizations, and re-immunizations when a patient is due for immunization. This functionality (Fig. 5) is designed so that the doctor can send reminders for vaccinations, or the software can track the beginning of each month and send reminders instead of the doctor when a patient is due for immunization. The software monitors patients daily, and if any patient has been vaccinated among those subject to mandatory vaccination, immunization, and/or re-immunization, it removes them from the list of patients subject to mandatory immunization. In Bulgaria, when a patient visits their personal doctor, there is a sign on the doctor's door indicating the vaccinations required for certain viruses or bacteria and for a specific age group. The software monitors the target group and sends reminders. For example, if parents have a baby aged 5-6 months, the software will send a notification to the parents to vaccinate the child against pertussis or other diseases.

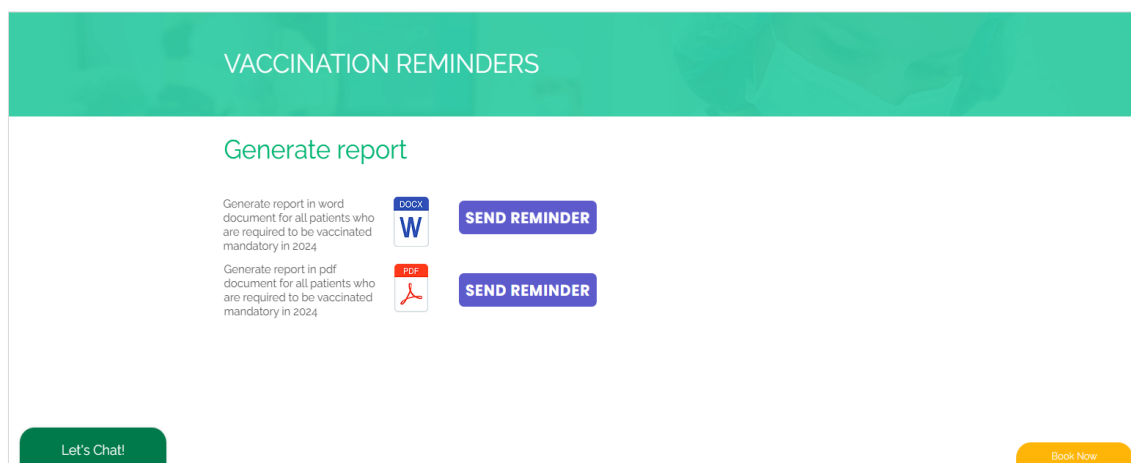


Fig. 5. Vaccination reminder

Technologies used

The medical software is programmed in C++, with machine learning mlpack utilized. The database, containing various symptoms, patient information, treatment recommendations, possible diseases, types of medication, informational campaigns, and data on individuals subject to mandatory immunization, is connected to the software via the command window embedded in the Microsoft Visual Studio 2022 development environment. Additionally, the database is SQLite-based. The program interface is developed in Notepad++ using HTML and CSS, connected through WebAssembly.

Program code

```
class GPAssistant {
private:
    vector<Patient> patients;

public:
    void addPatient(const Patient& p) {
        patients.push_back(p);
    }

    void suggestTreatment(const Patient& p) {
        // Implement treatment suggestion based on symptoms
        cout << "Suggesting treatment for patient: " << p.name << endl;
    }

    void scheduleAppointment(const Patient& p, const string& date, const string& time) {
        // Implement appointment scheduling
        cout << "Scheduled appointment for patient: " << p.name << " on " << date << " at " << time << endl;
    }

    void sendReminder(const Patient& p, const string& reminderType) {
        // Implement reminder sending
        cout << "Sending " << reminderType << " reminder to patient: " << p.name << endl;
    }

    void runPreventionCampaign(const string& campaignType) {
        // Implement prevention campaign
        cout << "Running " << campaignType << " prevention campaign" << endl;
    }

    bool validatePatient(const Patient& p) {
        if (p.name.empty() || p.symptoms.empty()) {
            cerr << "Error: Patient name and symptoms must not be empty." << endl;
            return false;
        }
        return true;
    }
};
```

CONCLUSION

In conclusion, the software, which has been designed, aims to improve existing capabilities and add new ones that are not yet available in other medical software. The software is designed to protect the patient from allergic reactions if they occur. The design is made to be as user-friendly as possible.

Moving forward, the software will continue to self-train and become increasingly precise. Other functionalities are also envisaged to further facilitate the work or partially replace the work of the general practitioner, such as designing a graphical robot that will interact online, make treatment suggestions, and prescribe medications online.

ACKNOWLEDGMENT

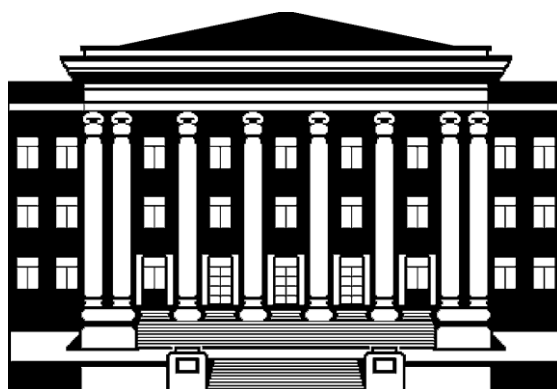
Thanks to Professor Katalina Grigorova, who supported me and provided advice to create this medical software. I am grateful to several general practitioners who tested the software and reviewed it. Thanks also to University of Ruse and all university lecturer who continually teach and educate me!

REFERENCES

- [1] Gamma CodeMaster - Gamma Consult (gammaconsult.com) checked on March 4, 2024.
- [2] Health Information Systems | Kontrax checked on April 10, 2024.
- [3] How It Works | Harmony Medical checked on March 15, 2024.
- [4] Immunization Interface - AllegianceMD EHR Software checked on February 18, 2024.
- [5] Medical Software Mobile and Desktop Computers, Dental Software, Medical Systems Software for Doctors OPL MTS DTS Global Medics (gss.bg) checked on February 14, 2024.
- [6] Medical Software - HUBIS Ltd (hubisltd.com) checked on January 27, 2024.
- [7] Niset Ltd - Medical Software (nisetbg.com) checked on January 9, 2024.
- [8] Software for Specialist Doctors - Smart Software Systems (smart-ss.org) checked on March 22, 2024.

UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“

UNION OF SCIENTISTS - RUSE



**64TH ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE
OF UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“
AND UNION OF SCIENTISTS – RUSE**

OCTOBER 2025

I N V I T A T I O N

**Ruse, 8 Studentska str.
University of Ruse
Bulgaria**

PROCEEDINGS
Volume 63, Series 6.7

Financial Mathematics
&
Informatics

Under the general editing of:
Assoc. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD

Editor of Volume 63:
Assoc. Prof. Desislava Atanasova, PhD

Bulgarian Nationality
First Edition

Printing format: A5
Number of copies: on-line

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



PUBLISHING HOUSE
University of Ruse "Angel Kanchev"