

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

UNIVERSITY OF RUSE “Angel Kanchev”
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ “Ангел Кънчев”

BSc, MSc and PhD Students & Young Scientists
Студенти, докторанти и млади учени

PROCEEDINGS

Volume 64, book 6.7.
Financial Mathematics
&
Informatics

НАУЧНИ ТРУДОВЕ

Том 64, серия 6.7.
Финансова математика
&
Информатика

Ruse
Русе
2025

Volume 64 of PROCEEDINGS includes the papers presented at the scientific conference RU&SU'25, organized and conducted by University of Ruse "Angel Kanchev" and the Union of Scientists - Ruse. Series 6.7 contains papers reported in the Financial Mathematics and Informatics sections.

| Book | Code | Faculty and Section |
|---|-----------------------|---|
| Agrarian and Industrial Faculty | | |
| 1.1. | FRI-8.303b-1-AMT&ASVM | Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine |
| | FRI-1.202-1-MR | Maintenance and Reliability |
| | FRI-9.2-1-THPE | Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment |
| | FRI-19.206-1-EC | Ecology and Conservation |
| | FRI-16.203-1-ID | Industrial Design |
| 1.2. | THU-SSS-AMT&ASVM | Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Science and Veterinary Medicine |
| | THU-SSS-MR | Maintenance and Reliability |
| | THU-SSS-THPE | Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment |
| | THU-SSS-EC | Ecology and Conservation |
| | THU-SSS-ID | Industrial Design |
| Faculty of Mechanical and Manufacturing Engineering | | |
| 2.1. | FRI-1.317-1-MEMBT | Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies |
| 2.2. | TUE-1.417-SSS-MEMBT | Mechanical Engineering and Machine-Building Technologies |
| Faculty of Electrical Engineering Electronics and Automation | | |
| 3.1. | FRI-10.326-1-EEEE | Electrical Engineering, Electronics and Automation |
| 3.2. | FRI-2G.303-1-CCT1 | Communication and Computer Technologies 1 |
| | FRI-2G.302-1-CCT2 | Communication and Computer Technologies 2 |
| 3.3. | THU-10.326-SSS-EEEE | Electrical Engineering, Electronics and Automation |
| | THU-2G.303-SSS-CCT | Communication and Computer Technologies |
| Faculty of Transport | | |
| 4.1. | FRI-KC.H2-1-TMS | Transport and Machine Science |
| | SAT-KC.H2-1-TMS | Transport and Machine Science |
| 4.2. | FRI-20.21-2-SITSTL | Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics |
| 4.3. | MON-5.21-SSS-TMS | Transport and Machine Science |
| Faculty of Business and Management | | |
| 5.1. | FRI-2B.412-1-EM | Economics and Management |
| 5.3. | THU-2G404-SSS-EM | Economics and Management |
| 5.4. | FRI-2G.510-1-ESIS | European Studies and International Security |
| 8.2. | FRI-1.322-1-SW | Social Work |
| Faculty of Natural Sciences and Education | | |
| 6.1. | FRI-1.414-MIP | Mathematics, Informatics and Physics |
| 6.2. | FRI-2G.305-1-PP | Pedagogy and Psychology |
| 6.3. | FRI-2G.309-1-LL | Linguistics and Literature |
| | FRI-12.23-1-AS | Art Studies |
| 6.4. | FRI-2G.307-1-ERI | Education - Research and Innovations |

| | | |
|--|---------------------|---|
| 6.5. | FRI-1.219-SSS-PP | Pedagogy and Psychology |
| 6.6. | FRI-2G.405-SSS-LLA | Linguistics, Literature and Art Science & History, Ethnology and Folklore |
| 6.7. | FRI-2.203-SSS-FM | Financial Mathematics |
| | FRI-1.407.1-SSS-I | Informatics |
| Faculty of Law | | |
| 7.1. | FRI-2B.313-1-L | Law Studies |
| | SAT-2B.313-1-L | Law Studies |
| 7.2. | FRI-2B.312-1-NS | National Security |
| 7.3. | WED-2B313-SSS-L | Law Studies |
| Faculty of Public Health and Health Care | | |
| 8.1. | FRI-2K.201-1-HP | Health Promotion |
| 8.3. | FRI-2G.104-1-HC | Health Care |
| 8.4. | FRI-2G.309-1-MCDA | Medical and Clinical Diagnostic Activities |
| 8.5. | THU-K.101-SSS-HP | Health Promotion |
| | SAT-SSS-SMHPA | Sports Medicine and Health Prevention of the Athlete |
| 8.6. | FRI-2.101-SSS-HC | Health Care |
| 8.7. | THU-2Г.105-SSS-MCDA | Medical and Clinical Diagnostic Activities |
| Quality of Education Directorate | | |
| 9.1. | FRI-2.104-1-QHE | Quality of Higher Education |
| Razgrad Branch of the University of Ruse | | |
| 10.1. | FRI-LCR-1-CT(R) | Chemical Technologies |
| | FRI-LCR-P-1-CT(R) | Chemical Technologies (Poster session) |
| 10.2. | FRI-LCR-1-BFT(R) | Biotechnologies and Food Technologies |
| | SAT-LCR-P-1-BFT(R) | Biotechnologies and Food Technologies (Poster session) |
| 10.3. | TUE-SSS-BFT(R) | Biotechnologies and Food Technologies |
| | TUE-SSS-CT(R) | Chemical Technologies |
| Silistra Branch of the University of Ruse | | |
| 11.1. | FRI-110-1-MT(S) | Methodology of Training in... |
| | FRI-229-1-P(S) | Philology |
| | FRI-216-1-TS(S) | Technical Sciences |
| 11.2. | FRI-239-I-PMT(S) | Methodology of Training in... |
| | FRI-229-I-H(S) | Humanities |
| | FRI-216-I-TS(S) | Technical Sciences |

The papers have been reviewed.

ISSN 1311-3321 (print)

ISSN 2535-1028 (CD-ROM)

ISSN 2603-4123 (on-line) Copyright © authors

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.

The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access

PROGRAMME COMMITTEE

- **Prof. Amar Ramdane-Cherif**
University of Versailles, France
- **Assoc. Prof. Manolo Dulva HINA**
ECE Paris School of Engineering, France
- **Prof. Leon Rothkrantz**
Delft University of Technology, Netherlands
- **Assoc. Prof. Antonio Jose Mendes**
University of Coimbra, Portugal
- **Prof. Ville Leppanen**
University of Turku, Finland
- **Assoc. Prof. Marco Porta**
University of Pavia, Italy
- **Prof. Douglas Harms**
DePauw University, USA
- **Prof. Zhanat Nurbekova**
L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur Sultan, Kazakhstan
- **Prof. Mirlan Chynybaev**
Kyrgyz State Technical University, Bishkek, Kyrgyzstan
- **Prof. Ismo Hakala, PhD**
University of Jyväskylä, Finland
- **Prof. Artur Jutman, PhD**
Tallinn University of Technology, Estonia
- **Prof. RNDr. Vladimir Tvarozek, PhD**
Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava, Slovakia
- **Assoc. Prof. Ing. Zuzana Palkova, PhD**
Slovak University of Agriculture in Nitra, Nitra, Slovakia
- **Andrzej Tutaj, PhD**
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
- **Prof. Valentin NEDEFF Dr. eng. Dr.h.c.**
“Vasile Alecsandri” University of Bacău, Romania
- **Cătălin POPA, PhD**
“Mircea cel Bătrân” Naval Academy, Constantza, Romania
- **Prof. dr Larisa Jovanović**
Alfa University, Belgrade, Serbia
- **Prof. dr hab. Edmund LORENCOWICZ**
University of Life Sciences in Lublin, Poland
- **Assoc. Prof. Ion MIERLUS - MAZILU, PhD**
Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania
- **Prof. Dojčil Vojvodić PhD**
Faculty of Philosophy, University of Novi Sad, Serbia
- **Assoc. Prof. Alexandrache Carmen, PhD**
Department of Teacher Training, “Dunarea de Jos”, Galati University, Romania
- **Prof. Alberto Cabada**
University of Santiago de Compostela, Faculty of Mathematics, Santiago de Compostela, Spain
- **Kamen Rikev, Dr Hab.**
Institute of Slavic Philology, Maria Curie-Skłodowska University in Lublin, Poland
- **Anna Klimentova, PhD**
Constantine the Philosopher University of Nitra, Slovakia

- **Prof. Ricardo Gobato, PhD**
Secretariat of State of Parana Education and Sport, Laboratory of Biophysics and Molecular Modeling Genesis, Brasil
- **Prof. Fatima Rahim Abdul Hussein, PhD**
University of Misan, College of Basic Education, English Department, Iraq
- **Prof. Liqaa Habeb Al-esedi, PhD**
English Department, College of Education for Human Science, University of Diyala, Iraq
- **Prof. Esengeldin Baurzhan Satybaldyuly, PhD**
Pavlodar Pedagogical University “Alkey Margulan”, Kazakhstan
- **Prof. Igor Kevorkovich Danilov, DSc**
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia
- **Prof. Aleksander Valentinov Sladkowski, DSc**
Silesian University of Technology, Poland
- **Prof. Vera Karadjova, PhD**
“St. Kliment Ohridski” University – Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia
- **Prof. Aleksandar Trajkov, PhD**
“St. Kliment Ohridski” University - Bitola, Faculty of tourism and hospitality – Ohrid, Republic of North Macedonia
- **Prof. Petar Pepur, PhD**
University of Split, Croatia
- **Prof. Korhan Arun, PhD**
Namik Kemal University, Tekirdağ, Turkey
- **Prof. Yuliya Yorgova, PhD**
Burgas Free University, Bulgaria
- **Jelena Stankovic, PhD**
University of Nis, Serbia
- **Jovica Stankovic, PhD**
University of Nis, Serbia
- **Prof. Dr. Diana E. Woolfolk Ruiz**
CETYS University, Mexico
- **Prof. Gerhard Fiolka, PhD**
University of Fribourg, Switzerland
- **Prof. Haluk Kabaalioglu, PhD**
Yeditepe University, Turkey
- **Prof. Silva Alves, PhD,**
University of Lisbon, Portugal
- **Hanneke van Bruggen, DHC mult**
Appeldoorn, The Netherlands
- **Prof. Elena Torina**
Tula State Pedagogical University "L. N. Tolstoy", Tula, Russia
- **Prof. Violeta Jotova**
Direction Pediatrics at St. Marina University Hospital - Varna, Bulgaria, Chair ESPE Postgraduate Qualification Committee
- **Prof. Tanya Timeva, MD, PhD**
Obstetrics and Gynecology Hospital "Dr. Shterev", Sofia, Bulgaria
- **Prof. Kiril Stoychev, PhD,**
Institute of Metal Science, Equipment and Technologies “Acad. A. Balevsci” with Hydroaerodynamics centre – BAS, Bulgaria
- **Assoc. Prof. Mark Shamtsyan, PhD**
Technical University, Saint Petersburg, Russia
- **Assoc. Prof. Oleksii Gubenia, PhD**

- National University of Food Technologie, Kiev, Ukraine
- **Prof. Olexandr Zaichuk, DSc**
Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnepropetrovsk, Ukraine
 - **Prof. Eugene Stefanski, DSc**
Samara University, Russia
 - **Assoc. Prof. Tatiana Strokovskaya, PhD**
International University of Nature “Dubna”, Dubna, Russia
 - **Prof. DSc. Petar Sotirov**
Maria Curie-Sklodowska University of Lublin, Poland
 - **Accos. Prof. Krassimir Dochev Dochev, PhD**
University of Portsmouth School of Engineering, UK
 - **Mariana Yordanova Docheva, PhD**
University of Portsmouth School of Engineering, UK
 - **Assoc. Prof. Ivan Antonov Lukanov, PhD**
University of Botswana, Faculty of Engineering and Technology, Gaborone, Botswana
 - **Assoc. Prof. Petko Vladev Petkov, PhD**
Research Associate Cardiff University, UK
 - **Prof. Stepan Terzian DSc**
Bulgarian Academy of Science, Bulgaria
 - **Prof. Gabriel Negreanu, PhD**
University Politehnica of Bucharest, Romania
 - **Prof. Dobrin Vasilev, MD, PhD**
UMHAT Medica Cor, Ruse, Bulgaria
 - **Prof. Nicolae Craciunoiu**
University of Craiova
 - **Assoc. Prof. Stelian Tarulescu**
Transilvania University of Brasov
 - **Assoc. Prof. PhD Andrei-Alexandru Boroiu**
University of Pitești
 - **Prof. Renzo Capitani, PhD**
University of Florence, Engineering School, Italia
 - **Prof. Radoslaw Wrobel, DSc**
Wrocław University of Science and Technology, Poland
 - **Assoc. Prof. Darina Dimitrova PhD**
University of Economics - Varna

ORGANISING COMMITTEE

◆ **ORGANIZED BY: UNIVERSITY OF RUSE (UR) AND UNION OF SCIENTISTS (US) - RUSE**

◆ **ORGANISING COMMITTEE:**

• **Chairperson:**

Assoc. Prof. Desislava Atanasova, PhD – Rector of UR, Chairperson of US – Ruse,
Prof. DTSc. Hristo Beloev, DHC mult., Academician of Bulgarian Academy of Sciences

• **Scientific Secretary:**

Prof. Daniel Bratanov, PhD
dmbratanov@uni-ruse.bg

• **THEMATIC FIELDS:**

- **Agricultural Machinery and Technologies, Agrarian Sciences and Veterinary Medicine**
Assoc. Prof. Атанас Атанасов, PhD,
aatanasov@uni-ruse.bg, +359 885 497 406
- **Maintenance and Reliability**
Prof. Mitko Nikolov, DSc,
mnikolov@uni-ruse.bg, +359 82 888 458
- **Thermal, Hydro- and Pneumatic Equipment**
Prof. Gencho Popov, DSc,
gspopov@uni-ruse.bg, +359 82 888 441
- **Ecology and Conservation**
Assoc. Prof. Plamen Manev, PhD,
pmanev@uni-ruse.bg, +359 889 382 797
- **Industrial Design**
Assoc. Prof. Yordan Doichinov, PhD,
doichinov@uni-ruse.bg, +359 887 273 040
- **Pedagogy; Psychology and Methodology of training in...; (18.10.24, Silistra)**
Assoc. Prof. Diana Zhelezova-Mindizova, PhD,
dmindizova@uni-ruse.bg
- **Philology (27.10.23, Silistra)**
Assoc. Prof. Rumiana Lebedova, PhD,
rlebedova@uni-ruse.bg
- **Technical Sciences (27.10.23, Silistra)**
Assoc. Prof. Evgenia Goranova, PhD,
egoranova@uni-ruse.bg
- **Chemical Technologies (08-09.11., Razgrad)**
- **Biotechnologies and Food Technologies (08-09.11., Razgrad),**
Prof. Tsvetan Dimitrov, PhD,
conf_rz@abv.bg, +359 887 631 645
- **Mechanical Engineering and Machine-building Technologies**
Prof. Ivelin Ivanov, PhD,
ivivanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 472

- **Electrical Engineering, Electronics and Automation**
Assoc. Prof. Boris Evstatiev, DSc, bevstatiev@uni-ruse.bg, +359 82 888 371,
Assoc. Prof. Kiril Sirakov, csirakov@uni-ruse.bg, +359 82 888 364
- **Communication and Computer Systems**
Assoc. Prof. Yordan Kalmukov, jkalmukov@uni-ruse.bg, +359 82 888 681,
Assoc. Prof. Adriana Borodzhieva, PhD, aborodzhieva@uni-ruse.bg, +359 82 888 734
- **Transport and Machine Science**
Assoc. Prof. Tonch Balbuzanov,
tbalbuzanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 608
- **Sustainable and Intelligent Transport Systems, Technologies and Logistics**
Assoc. Prof. Tonch Balbuzanov,
tbalbuzanov@uni-ruse.bg, +359 82 888 608
- **Economics and Management**
Pr. Assist. Prof. Miroslava Boneva, PhD, mboneva@uni-ruse.bg, +359 82 888 776,
Pr. Assist. Prof. Elizar Stanev, PhD, eastanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 557
- **European studies and International Security**
Prof. Vladimir Chukov, DSc, vchukov@uni-ruse.bg, 0889 768745,
Pr. Assist. Elizar Stanev, eastanev@uni-ruse.bg, +359 82 888 557
- **Mathematics, Informatics and Physics**
Prof. Tsvetomir Vasilev, PhD,
tvasilev@uni-ruse.bg, +359 82 888 475
- **Education - Research and Innovations**
Pr. Assist. Prof. Ralica Vasileva-Ivanova, PhD,
rivanova@uni-ruse.bg, 0884 109 719
- **Pedagogy and Psychology**
Assoc. Prof. Valentina Vasileva, PhD, vvasileva@uni-ruse.bg, 0898 407 577,
Assoc. Prof. Galina Georgieva, PhD, gggeorgieva@uni-ruse.bg, 0889 951 920
- **History, Ethnology and Folklore**
Assist. Prof. Veselka Radeva, PhD,
vradeva@uni-ruse.bg, 082888437
- **Linguistics, Literature and Art Science**
Assoc. Prof. Emilia Nedkova, PhD,
enedkova@uni-ruse.bg, 0886 255 154
- **Health Promotion**
Assoc. Prof. Stefka Mindova, PhD,
smindova@uni-ruse.bg, +359 882 895 149
- **Social Work**
Pr. Assist. Prof. Ana Popova, PhD,
apopova@uni-ruse.bg, +359 889 874 219
- **Medical and Clinical Diagnostic Activities**
Pr. Assist. Deniza Trancheva, MD, PhD,
dtrancheva@uni-ruse.bg, +359 82 888 410
- **Health care**
Assoc. Prof. Tsveta Hristova, PhD,
tshristova@uni-ruse.bg, +359 878 389 793
- **Law**
Assoc. Prof. Elitsa Kumanova, PhD,
ekumanova@uni-ruse.bg, +359 884 980 050

- **National Security**
Assoc. Prof. Milen Ivanov, DSc,
poligon@abv.bg, +359 82 888 736
- **Quality of Higher Education**
Prof. Ivanichka Serbezova, PhD, iserbezova@uni-ruse.bg,
Daniela Todorova, dtodorova@uni-ruse.bg, +359 82 888 378

• **REVIEWERS:**

FINANCIAL MATHEMATICS

- Prof. Angela Slavova, DSc
- Assoc. Prof. Iliya Brayonov, PhD
- Assoc. Prof. Evelina Veleva, PhD

INFORMATICS

- Prof. Valentina Voinohovska, DSc
- Assoc. Prof. Desislava Baeva, PhD

FINANCIAL MATHEMATICS

Content

| | |
|---|----|
| 1. FRI-2.203-SSS-FM-01 | 12 |
| Regional Comparison of Income Inequality in Bulgaria <i>Monika Deneva, Vesela Mihova</i> | |
| 2. FRI-2.203-SSS-FM-02 | 18 |
| Stock Prices Prediction with Lstm Neural Networks <i>Sevgi Ramadan, Maya Markova</i> | |
| 3. FRI-2.203-SSS-FM-03 | 28 |
| Study on the Impact of Foreign Direct Investment on Bulgaria's Economic Growth <i>Debora Marinova, Vesela Mihova</i> | |
| 4. FRI-2.203-SSS-FM-04 | 34 |
| A Research on House Price Index in Bulgaria by Regions <i>Georgi-Ventsislav Penev, Vesela Mihova</i> | |
| 5. FRI-2.203-SSS-FM-05 | 40 |
| Volatility Analysis of Gold and Silver Prices Using Arch and Garch Models <i>Preslava Daneva,, Vesela Mihova</i> | |
| 6. FRI-2.203-SSS-FM-06 | 48 |
| Stefan Problem for a Two-Species Competitive Model in Ecology <i>Teodor Georgiev</i> | |
| 7. FRI-2.203-SSS-FM-07 | 57 |
| Optimization of Specific Transport and Logistics Processes Using a Flexible Mathematical Model for Cost Minimization <i>Betina Gabrovska, Ivan Georgiev, Dimitar Grozev</i> | |
| 8. FRI-2.203-SSS-FM-08 | 64 |
| Application of Arima and Capm Models in Ulta Beauty Stock Valuation <i>Gabriela Nedelcheva, Elitsa Raeva</i> | |
| 9. FRI-2.203-SSS-FM-09 | 71 |
| The Logistic Equation in Population Ecology and Epidemiology <i>Yoana Delimarkova, Julia Chaparova</i> | |
| 10. FRI-2.203-SSS-FM-10 | 72 |
| Threshold Dynamics in A Model of Hiv Infection <i>Ivan Tsankov, Julia Chaparova</i> | |
| 11. FRI-2.203-SSS-FM-11 | 79 |
| Mathematical Modeling of Schedule Planning Using Ilp with Legal and Operational Constraints <i>Tsvetelina Ivanova, Ivan Georgiev</i> | |

INFORMATICS

Content

| | |
|--|-----|
| 1. FRI-1.416.1-SSS-I-01 | 86 |
| Graph Shortest Path Algorithms and their Applications <i>Hristo Hristov, Galina Atanasova</i> | |
| 2. FRI-1.416.1-SSS-I-02 | 88 |
| Role of the Project Manager in the Successful Management and Building of a Software Project / Video Game <i>Teodora Daskalova, Martin Dzhurov, Galina Atanasov</i> | |
| FRI-1.416.1-SSS-I-03 | 96 |
| Physically Based Rendering (Pbr) in Tsar Game Engine <i>Serkan Sadulov, Mustafa Mustafov, Kamelia Shoilekova</i> | |
| FRI-1.416.1-SSS-I-04 | 101 |
| Database Creation and Management <i>Martin Nikolov</i> | |

REGIONAL COMPARISON OF INCOME INEQUALITY IN BULGARIA¹

Monika Deneva

Financial Mathematics Student
Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: mvalacheva910@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

***Abstract:** This study examines the Gini coefficient as a key indicator for measuring income inequality in Bulgaria. For this purpose, annual data from the National Statistical Institute for the period 2017–2023 has been used. A statistical analysis has been conducted, including hypothesis testing for differences in the average values of the Gini coefficient at the regional versus national level, as well as tests for normal distribution of the Gini coefficient on both national and regional levels. The analysis provides important insights for measuring social inequality and for developing policies aimed at improving economic fairness and sustainability.*

***Key words:** Income Inequality, Gini Coefficient, Lorenz Curve, Statistical Hypothesis Test.*

ВЪВЕДЕНИЕ

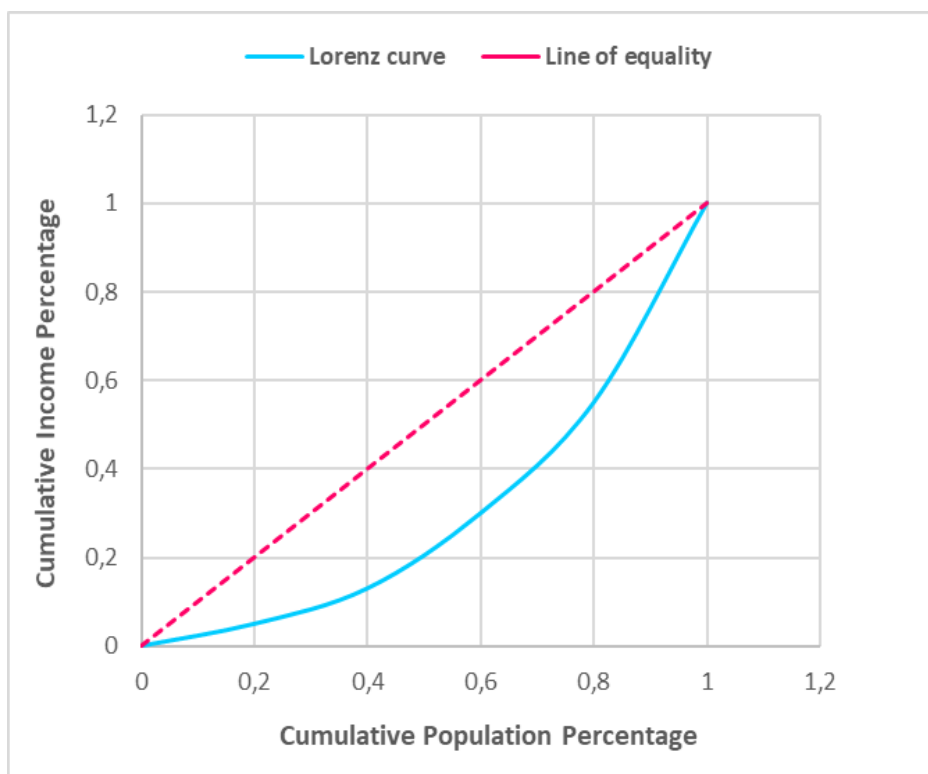
Анализирането на нивото и динамиката на доходното неравенство сред населението е от съществено значение за формулирането на ефективна икономическа и социална политика. Несправедливото разпределение на доходите е предпоставка за обществено недоволство, което може да доведе до икономическа и политическа нестабилност. Както високите, така и прекалено ниските стойности в неравенството са проблематични в условията на конкретно общество. Преходът на България от централно-планова към пазарна икономика води до съществени промени в начина, по който се формират и разпределят доходите. Тези процеси се отразяват в увеличаването на доходното неравенство, както и в преструктурирането на доходите на домакинствата. Забавянето на икономически реформи, съчетани с либерализация на стопанската дейност, спад в производството, разширяване на сивата икономика и рестриктивни политики спрямо трудовите доходи и социалните трансфери, допринасят за обедняването на значителна част от населението. В резултат, България днес се откроява с най-високи нива на доходно неравенство сред страните от Европейския съюз [1].

Един от най-разпространените методи за графично представяне на неравномерното разпределение на доходите е кривата на Лоренц. Тя позволява да се анализира динамиката на този процес и чрез нея се илюстрира степента, в която разпределението на доходите в обществото се отклонява от идеалното (теоретично) разпределение. Анализът на резултатите зависи от разстоянието между идеалното разпределение и действителната крива – колкото това разстояние е по-малко, толкова по-успешно се реализира процесът на преразпределение на доходите между различните социални групи. Обратно, по-голямото отклонение показва слаба ефективност на този процес [2].

Графично, кривата на Лоренц представлява кумулативното разпределение на доходите в една икономика. На хоризонталната ос е представен кумулативният процент от населението, подреден от най-нисък към най-висок доход, а на вертикалната ос – кумулативният процент

¹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: РЕГИОНАЛНО СРАВНЕНИЕ НА НЕРАВЕНСТВО НА ДОХОДИТЕ В БЪЛГАРИЯ.

от общите доходи, акумулирани от съответния дял от населението. Идеалното равенство, при което всеки индивид има еднакъв дял от общите доходи, е представено чрез права линия на 45 градуса, известна като линия на равенството. Кривата на Лоренц винаги лежи под тази линия, тъй като в реалния свят пълно равенство е практически невъзможно.



Фигура 1. Крива на Лоренц

Коефициентът на Джини е основният показател за измерване на доходното неравенство. Той служи за оценка на степента, в която разпределението на доходи или потребителски разходи се отклонява от равномерното. Базира се на анализа на кривата на Лоренц и предоставя количествена оценка на степента на неравенство в икономиката. Стойностите на коефициента варират между 0 и 1. Резултат, равен на 0, показва идеално равенство, което означава, че доходите са разпределени равномерно между всички обществени групи. Обратно, стойност от 1 означава, че целият доход е концентриран в ръцете на един единствен индивид, което отразява максимално неравенство в икономиката [2].

Коефициентът на Джини може да бъде изчислен чрез кумулативни дистрибуции на доходите със следната формула:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp, \quad (1)$$

където:

- $L(p)$ е кумулативната функция на разпределението на доходите,
- p е кумулативният процент на населението.

Построяването на кривата на Лоренц и изчисляването на коефициента на Джини изискват обработка на емпирични данни за доходите на домакинствата. Чрез прилагането на статистически и иконометрични методи може да се оцени неравенството в разпределението на доходите в различни региони и времеви периоди.

В настоящата работа е изследвано неравенството на доходите в България и е направено регионално сравнение на коефициента на Джини. За целта са използвани данни от

Националният статистически институт (НСИ) на годишна база за периода от 2017-2023 година [3]. С помощта на SPSS [4] по данните от извадката е направен статистически анализ, проверени са хипотези за разлика в средните стойности на коефициента на Джини на регионално спрямо национално ниво и е направена проверка за нормално разпределение на коефициента на Джини на национално и регионално ниво. Направеният анализ предоставя важна информация за измерване на социалното неравенство и за развитието на политики, които да подобрят икономическата справедливост и устойчивост.

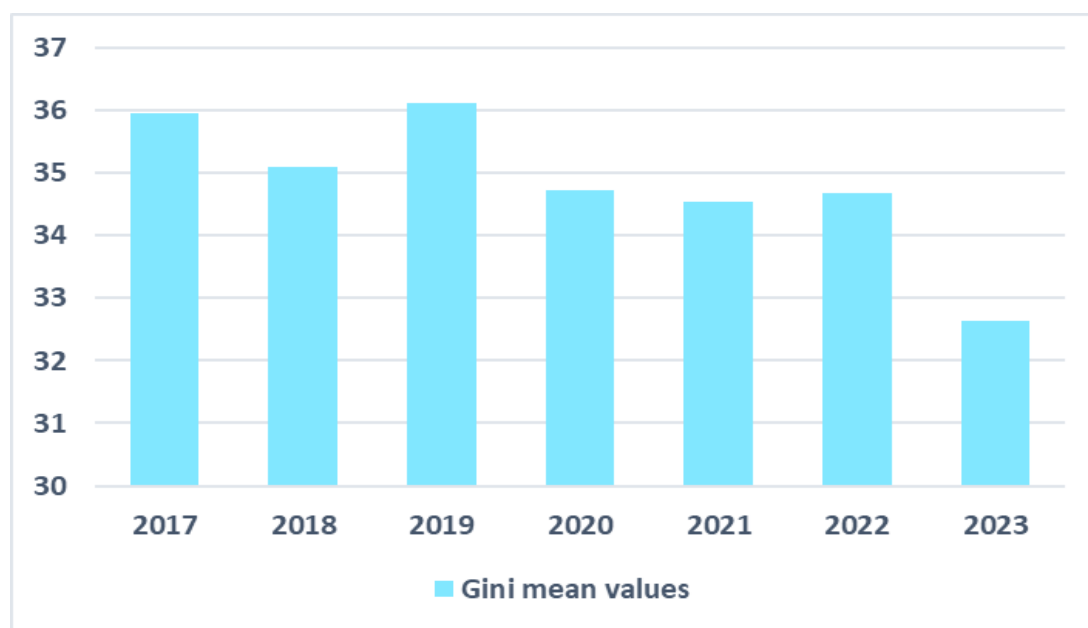
ИЗЛОЖЕНИЕ

Данните, използвани за статистическа обработка, отразяват стойностите на коефициента на Джини в проценти, улеснявайки сравнението между отделните региони. Анализът е представен чрез таблици и фигури, които визуализират основните характеристики и изменения в стойностите на показателя в рамките на изследвания период. Представянето на резултатите започва с обобщен преглед на стойностите на коефициента на Джини на в цялата страна.

Таблица 1. Описателни статистики за Джини на национално ниво

| Показател | Средна стойност | Медиана | Стандартно отклонение | Коеф. на асиметрия | Коеф. на ексцес | Коеф. на вариация |
|-----------|-----------------|---------|-----------------------|--------------------|-----------------|-------------------|
| Gini | 34,820% | 34,195% | 4,486% | 0,458 | 0,162 | 12,883% |

В Таблица 1 са представени описателните статистики за коефициента на Джини на национално ниво. Средната стойност на коефициента на Джини е 34,82%, докато медианата е 34,2%. Стандартното отклонение на коефициента на Джини е 4,49%, а коефициентът на вариация е 12,88%, което показва, че данните са приблизително еднородни. Коефициентът на асиметрия е 0,458, а коефициентът на ексцес е 0,162, което индикира за нормалност на разпределението на коефициента на Джини на национално ниво. Това се потвърждава от направената проверка за нормалност на разпределението – установено е, че то е близо до нормалното теоретично разпределение с гаранционна вероятност 99%.



Фигура 2. Графика на средните стойности на Джини

Фигура 2 показва динамиката на средните стойности на коефициента на Джини за България в периода 2017-2023 г. През 2017 и 2019 г. коефициентът е бил най-висок, което сочи

наличието на по-голямо икономическо неравенство през тези години. След 2019 г. се наблюдава тенденция към намаляване, като между 2020 и 2022 г. стойностите остават сравнително стабилни. През 2023 г. обаче се отчита рязък спад, което може да подсказва намаляване на социално-икономическите различия.

Според последни данни на Евростат [5] за 2023 г. се наблюдава обща тенденция към намаляване на доходното неравенство в редица държави-членки на Европейския съюз. В този контекст, България отчита най-голям спад на коефициента на Джини – с 3 процентни пункта спрямо 2017 г. Сравнимо намаление се наблюдава и в съседни на България страни като Румъния (2,1%) и Гърция (1,6%), както и в други източноевропейски държави като Полша (2,2%) и Словакия (1,6%). Тези данни могат да се интерпретират като сигнал за подобрене в икономическата и социалната структура на региона. Въпреки това, страната ни продължава да бъде сред тези с най-високи нива на неравенство, което налага провеждането на устойчиви политики в подкрепа на социалната стабилност.

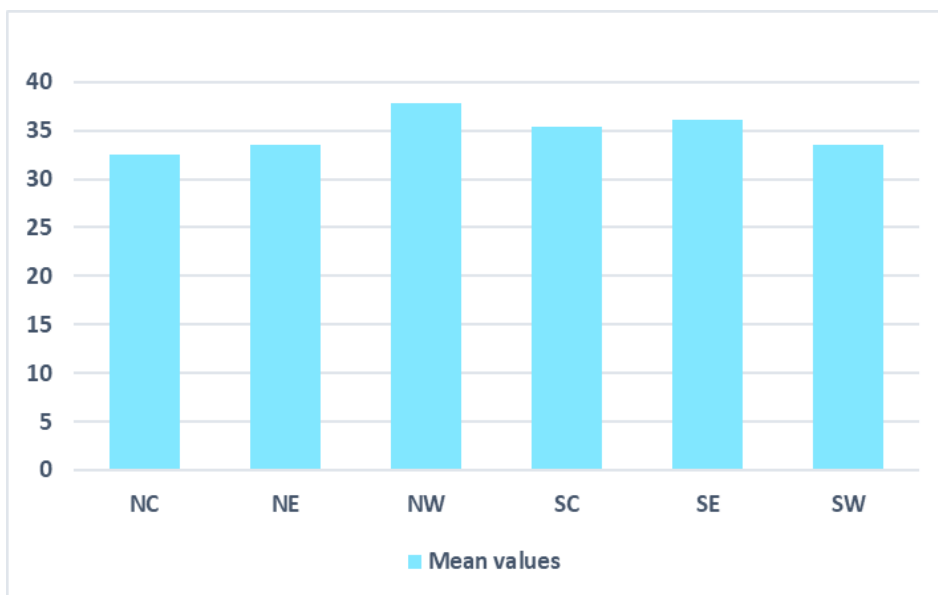
| Регион | Показател | Средна стойност | Медиана | Станд. откл. | Коеф. на асиметрия | Коеф. на ексцес | Коеф. на вариация |
|------------------------|-----------|-----------------|---------|--------------|--------------------|-----------------|-------------------|
| Северен Централен (NC) | Gini | 32,550% | 32,500% | 3,339% | 0,028 | 0,619 | 10,257% |
| Североизточен (NE) | Gini | 33,551% | 33,400% | 4,075% | 0,092 | -0,364 | 12,147% |
| Северозападен (NW) | Gini | 37,808% | 37,500% | 3,951% | 0,549 | -0,062 | 10,449% |
| Южен Централен (SC) | Gini | 35,418% | 34,500% | 4,509% | 0,930 | 1,268 | 12,730% |
| Югоизточен (SE) | Gini | 36,053% | 36,050% | 3,326% | 0,157 | -0,064 | 9,225% |
| Югозападен (SW) | Gini | 33,532% | 32,300% | 5,218% | 0,908 | 0,013 | 15,561% |

Таблица 2. Описателни статистики за Джини по региони

Таблица 2 представя статистически показатели за коефициента на Джини за регионите на България. Най-високи средни стойности на коефициента се наблюдават в Северозападния (37,81%) и Югоизточния (36,03%) регион, което показва най-големи различия в доходите. В същото време, Северният централен регион има най-ниско неравенство (средна стойност от 32,55%), което вероятно се дължи на по-равномерно разпределение на доходите в региона.

Разглеждайки останалите статистически показатели, прави впечатление, че коефициентите на асиметрия и ексцес индикират нормалност за повечето региони, тъй като стойностите на тези показатели попадат в границите $[-1;1]$. Изключение прави коефициентът на ексцес за Южния централен регион (1,268), където е налице остър ексцес. Най-висока вариация на доходите се отчита в Североизточния, Южния централен и Югозападния регион, където данните са приблизително еднородни. В останалите райони наблюдаваните данни са еднородни.

Направена е проверка за нормалност на разпределението на коефициента на Джини по региони и е установено, че за всички региони разпределението на коефициента на Джини е близо до нормалното теоретично разпределение с гаранционна вероятност 99%.



Фигура 3. Графика на средните стойности на Джини по региони

Фигура 3 потвърждава наличието на значителни регионални различия в икономическото неравенство в България. Северозападният (NW) регион продължава да бъде най-засегнат от икономическите дисбаланси. Това съответства на статистическите данни, според които този регион традиционно е сред най-бедните в страната, с висока безработица и слаба икономическа активност. От друга страна Северният централен регион показва най-ниско неравенство.

Таблица 3. Проверка на хипотези за средна стойност на Джини по региони

| Регион | Ниво на значимост | Разлика в средните стойности |
|--------|-------------------|------------------------------|
| NC | 0,000 | -2,270 |
| NE | 0,111 | -1,269 |
| NW | 0,000 | 2,988 |
| SC | 0,438 | 0,598 |
| SE | 0,060 | 1,233 |
| SW | 0,153 | -1,288 |

Направена е проверка на хипотези относно разлика в средната стойност на коефициента на Джини по региони спрямо страната. В таблица 3 са представени изчисленото от SPSS ниво на значимост и разликите в средните стойности на всеки регион спрямо средната стойност на коефициента на Джини за страната (34,82%). Нивото на значимост в регионите Северен централен (NC) и Северозападен (NW) е по-малко от 0.01, което показва, че с гаранционна вероятност 99% в тези региони има статистически значими различия спрямо стойността на коефициента на Джини на национално ниво. В регионите Североизточен (NE), Югоизточен (SE), Южен централен (SC) и Югозападен (SW), наблюдаваните различия не са статистически значими (нивото на значимост > 0.01).

Коефициентът на Джини в Северозападния регион (NW) е средно с 3,26% по-висок от този за страната. Това се дължи на факта, че регионът е най-бедният в страната и ЕС, характеризиращ се с висока безработица, ниски доходи и силна миграция към други региони.

Северният централен регион (NC) има разлика в средната стойност на коефициента на Джини спрямо средното за страната от -2,27%. Това означава, че неравенството на доходите в региона е по-ниско в сравнение със средното за страната. Един от основните фактори за това

е по-равномерното разпределение на доходите и липсата на силно изразени икономически дисбаланси между отделните области. Русе, като най-големият град в региона, е важен търговски и индустриален център. Добре развитата лека и тежка промишленост, логистичният сектор и високата заетост в Русе допринасят за по-малки разлики в доходите в сравнение с други региони, където икономическите дисбаланси са по-силно изразени.

ИЗВОДИ

В настоящата работа е изследвано неравенството на доходите в България и е направено регионално сравнение на коефициента на Джини. Въз основа на изследването могат да се направят следните изводи:

1. За периода 2017-2023 г. средната стойност на коефициента на Джини в България е 34,82%. След 2019 г. се наблюдава тенденция към намаляване на коефициента на Джини, като през 2023 г. се отчита рязък спад в коефициента до 32,64%, което е сигнал за подобрене в икономическата и социалната структура на страната. Въпреки това, страната ни продължава да бъде сред държавите в ЕС с най-високи нива на социално неравенство, което налага провеждането на устойчиви политики в подкрепа на социалната стабилност.

2. По отношение на регионалните средни стойности на коефициента на Джини през разглеждания период, в регионите Северен централен и Северозападен има статистически значими различия спрямо средната стойност на коефициента на национално ниво. В Северозападния регион коефициентът на Джини е значимо по-висок от средния за страната (37,81%), като това показва, че в този регион има по-голямо социално неравенство. В Северния централен регион коефициентът на Джини е значимо по-нисък от средния за страната (32,55%), което е индикация за по-ниско социално неравенство.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

REFERENCES

- [1] Bratoeva-Manoleva, S. (2021). Household Incomes and Inequality in Bulgaria in the period 1990–2019. *Economics*, 21 (1), 2534-9457
- [2] Lyubenova, B. (2018). Economic Inequality in Bulgaria in the 21st century. *Economic archive*, 18 (1), 2534-9201
- [3] Национален статистически институт, URL: <https://www.nsi.bg/>
- [4] IBM SPSS Software, URL: <https://www.ibm.com/analytics/spss-statistics-software>
- [5] Eurostat, URL: <https://ec.europa.eu/eurostat>

STOCK PRICES PREDICTION WITH LSTM NEURAL NETWORKS²

Sevgi Ramadan – Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: sevgiramadan245@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Maya Markova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: maya.markova@gmail.com

***Abstract:** Forecasting stock prices is a complex challenge due to the nonlinear and volatile nature of financial markets. Traditional models like ARIMA or linear regression often fall short in capturing such dynamics. In this study, we employ Long Short-Term Memory (LSTM) neural networks to predict daily closing stock prices for Tesla, Google, Amazon, and Apple, using a five-feature input: Open, High, Low, Close, and Volume. A multistep supervised learning framework with LSTM layers is implemented and compared to traditional methods using evaluation metrics like RMSE and MAE. The results show that LSTM models can accurately capture both short-term fluctuations and long-term trends, making them suitable for financial forecasting. The paper highlights the architecture, training, and forecasting steps, offering a basis for further optimization and integration into real-time trading strategies.*

***Key words:** Stock Prediction, LSTM, Time Series, Neural Networks, Deep Learning, Financial Forecasting.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Предсказването на цените на акциите е от съществено значение за инвеститорите, анализаторите и финансовите институции, тъй като подпомага вземането на информирани решения и оптимизирането на инвестиционните стратегии (Sezer et al., 2020; Bao et al., 2017). Въпреки че традиционните методи като ARIMA и линейната регресия са широко използвани за прогнозиране на финансови времеви редове, те често се оказват недостатъчни при моделирането на сложните и нелинейни зависимости, характерни за динамиката на фондовите пазари (Atsalakis & Valavanis, 2009; Fischer & Krauss, 2018).

С развитието на дълбокото обучение и по-специално на невронни мрежи с дълга краткотрайна памет (Long Short-Term Memory – LSTM невронни мрежи), се откриват нови възможности за подобряване на точността при предсказване на цените на акциите (Fischer & Krauss, 2018; Nelson et al., 2017). LSTM мрежите са специално проектирани да улавят дългосрочни зависимости във времеви редове, което ги прави подходящи за анализ на финансови данни (Nelson et al., 2017; Bao et al., 2017).

Настоящото изследване има за цел да изгради и оцени LSTM модел за предсказване на цените на акциите на водещи технологични компании като Tesla, Google, Amazon и Apple. Чрез сравнение на резултатите, получени с LSTM модела, с тези от традиционните методи като ARIMA и линейна регресия, се стремим да оценим ефективността и предимствата на дълбокото обучение в контекста на финансовите прогнози (Sezer et al., 2020; Fischer & Krauss, 2018).

Структурата на статията е организирана, както следва: в раздел 2 се представя литературен обзор на съществуващите методи за прогнозиране на цените на акциите; раздел 3 описва използваната методология, включително данните, архитектурата на модела, процеса на обучение и прогнозиране; в раздел 4 се представят резултатите от изследването, оценката на

² Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ПРЕДСКАЗВАНЕ НА ЦЕНИТЕ НА АКЦИИ С LSTM НЕВРОННИ МРЕЖИ.

точността, визуализацията на резултатите и обсъждането; накрая, в раздел 5 се правят заключения и се обсъждат възможностите за бъдеща работа в тази област.

ЛИТЕРАТУРЕН ОБЗОР

Използването на невронни мрежи с дълга краткотрайна памет (LSTM) за прогнозиране на цените на акциите привлича значителен научен интерес поради способността им да обработват последователни данни и да улавят сложни, нелинейни зависимости, характерни за финансовите пазари (Sezer et al., 2020; Rundo et al., 2019). LSTM моделите, разновидност на рекурентните невронни мрежи (Recurrent Neural Networks – RNN), са особено ефективни за съхранение и интегриране на информация във времето, което е от ключово значение при прогнозиране на цени на акции, повлияни от историческите тенденции (Bao et al., 2017). Настоящият обзор синтезира резултатите от различни изследвания и предоставя задълбочено разбиране за приложението на LSTM в областта на финансовото прогнозиране.

Предимства на LSTM при прогнозиране на цени на акции

Работа с нелинейни и волатилни данни: LSTM моделите демонстрират отлична производителност при работа с нелинейните и силно волатилни данни на фондовия пазар, значително превъзхождайки традиционните статистически методи в улавянето на комплексните ценови динамики (Gokulakrishnan et al., 2025).

Последователна обработка на данни: Благодарение на специфичната си архитектура, LSTM са създадени за ефективна обработка на последователни данни. Това ги прави изключително подходящи за прогнозиране на времеви редове, включително цените на акциите, при които миналите стойности директно влияят върху бъдещите трендове (Hu, 2024).

Метрики на производителността: Редица изследвания установяват, че LSTM моделите постигат значително по-ниски стойности на грешки като средна квадратна грешка (MSE) и корен на средната квадратична грешка (RMSE) в сравнение с алтернативни методи, което отразява тяхната по-висока точност на прогнозиране (Pan, 2024).

Хибридни и многовариантни подходи

Хибридни модели: Комбинацията на LSTM с други невронни мрежи, като конволюционни невронни мрежи (CNN), допринася за подобряване на точността и стабилността на прогнозите. Тези хибридни подходи ефективно използват предимствата на всяка архитектура при обработка на многовходни данни (Zhang et al., 2024).

Многовариантни входове: Включването на разнообразни променливи, като икономически показатели и метрики от техническия анализ, значително подобрява прогнозните възможности на LSTM моделите. Използването на многовариантни набори от данни позволява на моделите да се справят успешно със сложността на финансовите пазари.

Практически последствия и предизвикателства

Приложения в реална среда: LSTM успешно са приложени за прогнозиране на цени на акции на големи корпорации, като предоставят ценни данни за търговските стратегии и управлението на риска (Gokulakrishnan et al., 2025).

Качество и предварителна обработка на данните: Производителността на LSTM силно зависи от качеството на входните данни и от прилаганите методи за предварителна обработка. Подходящата нормализация и правилният избор на променливи са от съществено значение за ефективността на прогнозния модел (Zhang et al., 2024).

Предизвикателства: Въпреки силните страни на LSTM, тези модели срещат предизвикателства, като необходимостта от висококачествени и изчерпателни набори от данни, както и трудности при интегрирането на макроикономически фактори. Допълнително, валидирането на моделите в реално време и адаптацията им към динамичните пазарни условия са области, които изискват бъдещи разработки (Sezer et al., 2020).

Въпреки обещаващите резултати на LSTM при прогнозирането на цени на акции, съществуват редица ограничения. Сложността на финансовите пазари, характеризираща се с висока волатилност и секторна специфика, изисква непрекъснато усъвършенстване на

моделите и използваните методологии (Sezer et al., 2020; Bao et al., 2017). Освен това, интегрирането на анализ на настроенята и обработката на големи масиви от данни може допълнително да подобри адаптивността и точността на LSTM моделите в динамични пазарни среди. С напредването на изследванията преодоляването на посочените предизвикателства ще бъде от критично значение за реализиране пълния потенциал на LSTM мрежите в сферата на финансовото прогнозиране.

МЕТОДОЛОГИЯ

Данни

В настоящото изследване са използвани исторически дневни ценови данни за четири публични компании: Tesla (TSLA), Google (GOOG), Amazon (AMZN) и Apple (AAPL). Периодът на анализ обхваща от 1 януари 2015 до 1 януари 2025 г., а прогнозите се валидират върху данни от 2 януари 2025 до 20 април 2025. За всяка акция са изтеглени пет основни признака: Open, High, Low, Close и Volume. Всички стойности са мащабираны в интервала [0,1] със MinMaxScaler, по следната формула:

$$x' = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)} \quad (1)$$

Тренировъчният сет (70 %) се използва за оптимизация, а оставащите 30 % – за валидация. Към всеки запис е добавен таргет, зададен като цената на затваряне за следващия ден. Отстранени са всички пропуснати стойности, генерирани от изместването на таргета или от липсващи данни при пазарни почивки.

Архитектура на модела

Конструиран е рекурентен невронен модел на базата на LSTM клетки, за да се уловят дълготрайните зависимости във времевите редове на пазарните данни. Входният тензор има форма (SEQ_LENGTH, n_features), където SEQ_LENGTH = 60 представлява интервал от 60 последователни търговски дни, а n_features = 5 (Open, High, Low, Close, Volume).

Форма на входния тензор:

$$X \in \mathbb{R}^{(N-SEQ_LENGTH) \times SEQ_LENGTH \times n_features} \quad (1.1)$$

Архитектурата включва:

1. **Първи LSTM слой** със 32 единици, return_sequences=True и L2-регуларизация (1e-6), за да поддържа по-малък капацитет и да намалим риска от преобучаване.
2. **Dropout (0.2)**, който случайно изключва 20 % от невроните, за допълнително редуциране на overfitting.
3. **Втори LSTM слой** със 32 единици и return_sequences=False, отново с L2-регуларизация, за кондензиране на последователността в един вектор.
4. **Dropout (0.1)** преди плътните слоеве.
5. **Плътен слой (Dense)** с 8 неврона и ReLU активация, който въвежда нелинейна трансформация на кондензирания LSTM-изход.
6. **Изходен слой** с един неврон и линейна активация, който връща прогнозната стойност на следващата дневна „Close“ цена.

Оптимизаторът е Adam с нелокално управляем learning rate (непосочен, по подразбиране 1e-3). Функцията за загуба е средно квадратна грешка (MSE), която е подходяща за регресионен проблем.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad (1.2)$$

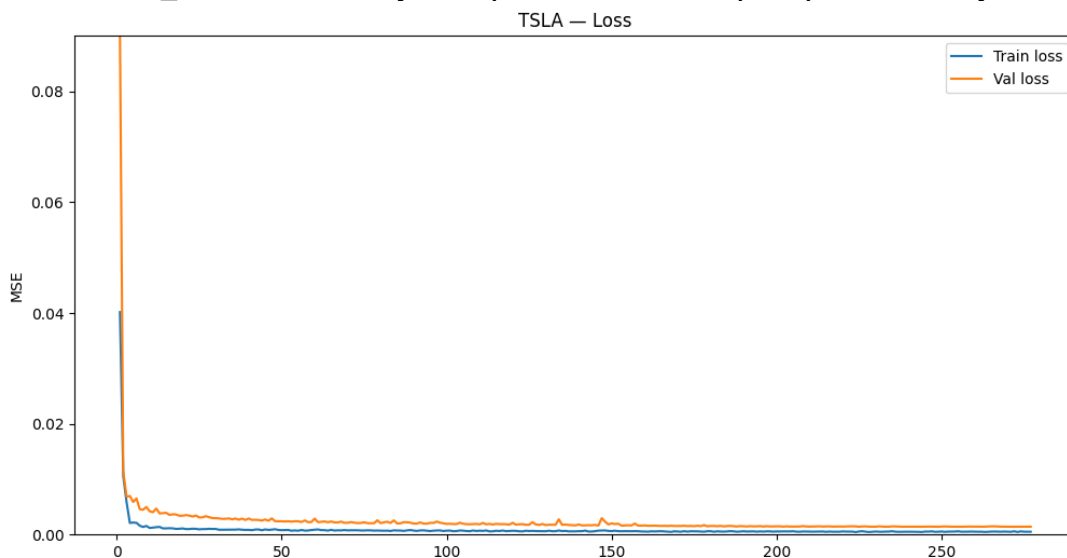
Поддържахме сравнително плитка мрежа, за да избегнем излишен капацитет спрямо размерите на набора данни и да уравнилим скоростта на обучение спрямо капацитета за обобщение.

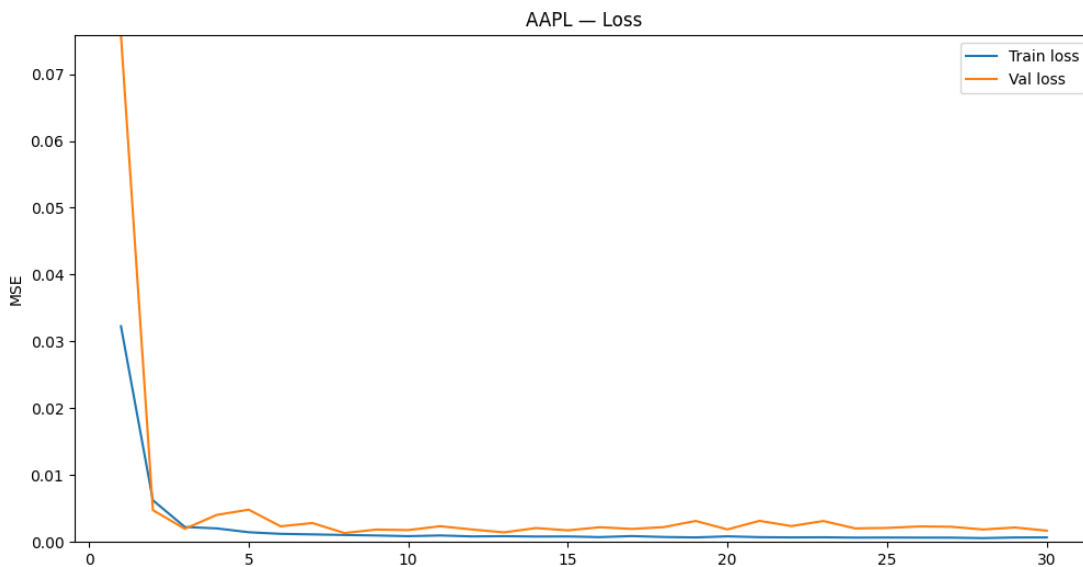
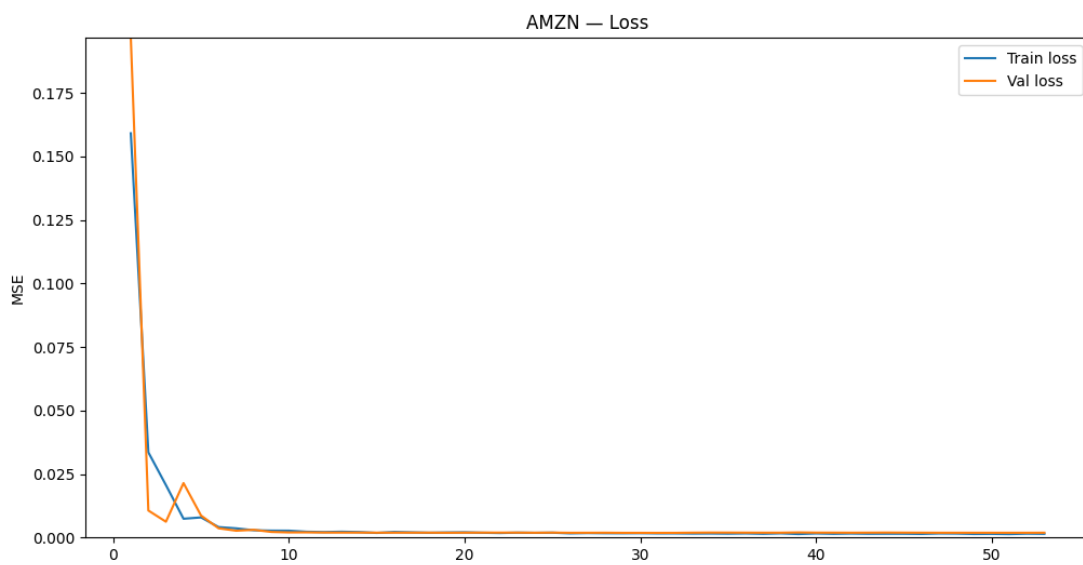
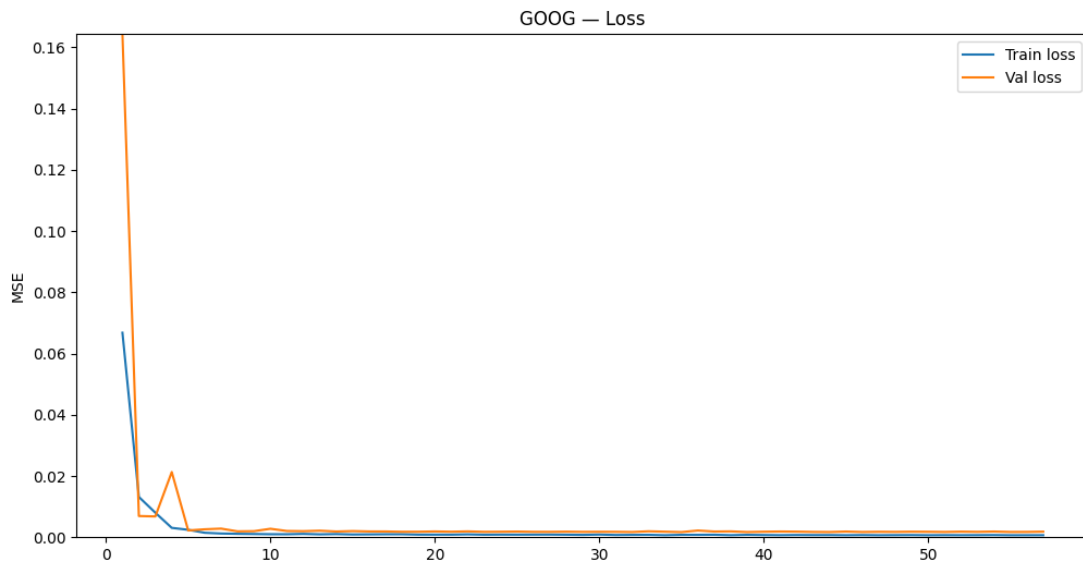
Обучение на модела

Моделът е обучен индивидуално за всяка от четирите компании, като за всеки тикер разделихме данните на тренировъчен (70 %) и валидационен (30 %) сет. За създаване на входните последователности използвахме функцията `create_seq`, която генерира X -масив от размер $(N-SEQ_LENGTH, SEQ_LENGTH, n_features)$ и y -вектор $(N-SEQ_LENGTH)$. При обучението приложихме callback:

- **EarlyStopping**: след 22 поредни епохи без подобрение на „val_loss“ обучението спира и се възстановяват теглата от най-добрата епоха.
- **ReduceLRonPlateau**: ако валидационната загуба не намалява в продължение на 20 епохи, learning rate се умножава по 0.5, до минимум $1e-6$.

Обучението бе проведено за максимум 400 епохи с `batch size = 256`. Тези по-строги критерии бяха избрани, за да се гарантира фина настройка на мрежата и да се позволи достатъчно време за конвергенция, без да се спестяват ресурси. В процеса на тренировката регуляризаторът L2 и dropout механизмите редуцират `overfitting`, което се вижно от плавното спадане на тренировъчната загуба и близките стойности на валидационната. Оптимизаторът Adam адаптира learning rate-а, което допринесе за по-бързо и стабилно сваляне на MSE в рамките на първите 100–150 епохи. Записват се „history“ обекти за всяка компания, които съдържат `loss` и `val_loss`, за да се визуализира и да се анализират кривите на обучение.





Прогнозиране

След приключване на обучението, прогнозирането на тестовия сет и на нови данни се извършва в няколко стъпки:

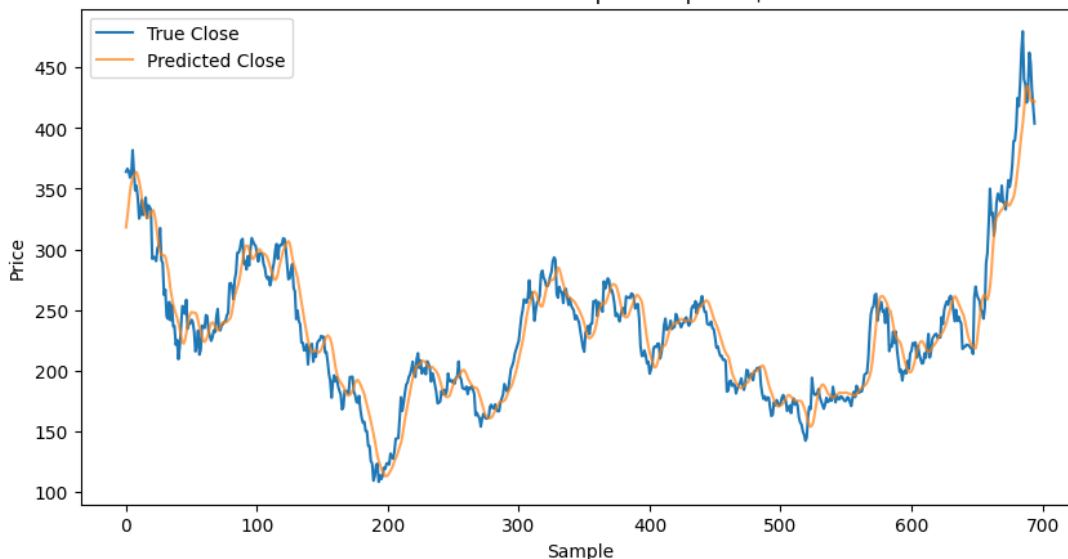
1. **Тестови прогнози:** използваме `model.predict(X_test)`, като преобразуваме мащабираните стойности обратно в абсолютните цени за „Close“ чрез `scaler.inverse_transform`, запазвайки само съответния индекс на колоната „Close“.
2. **RMSE и MAE:** за всяка акция изчислихме RMSE и MAE между истинските и прогнозните затварящи цени, за да оценим абсолютната и средната грешка.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2} \quad (2)$$

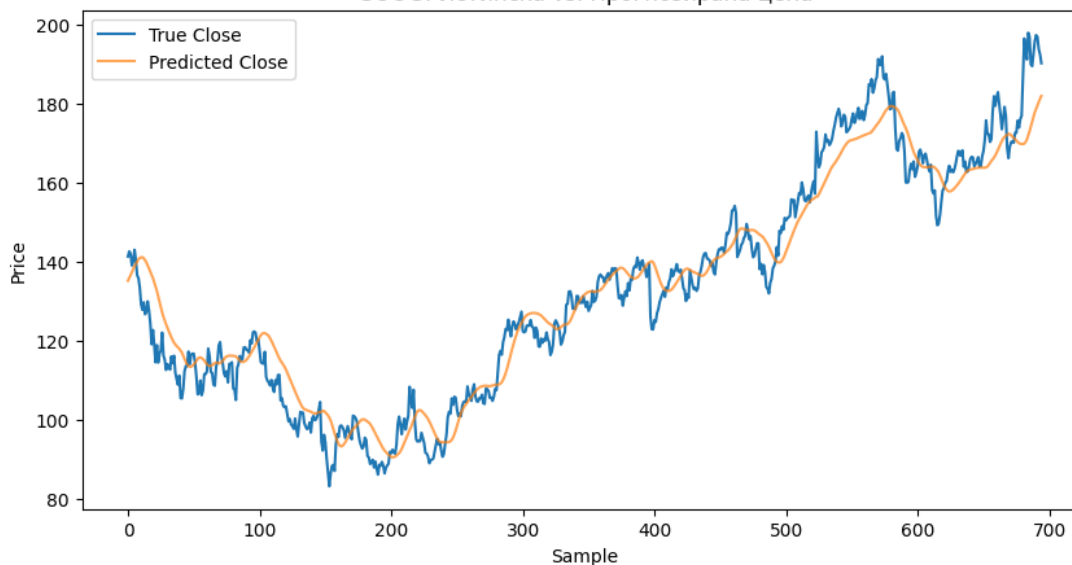
$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i| \quad (2.1)$$

3. **Визуализация:** начертани са графики „Истинска спрямо Прогнозирана цена“ за целия тестов период, което илюстрира способността на модела да следва дългосрочни трендове и краткосрочни колебания.

TSLA: Истинска vs. Прогнозирана цена



GOOG: Истинска vs. Прогнозирана цена





4. **Sliding-window прогнози:** за данните след 2 януари 2025 г. изтеглени са всички дни от началото, за да се пресметне отново MinMaxScaler и да се генерират последователни фрагменти от по 60 дни. След това `model.predict` връща прогноза за следващия ден, която се визуализира според същия шаблон.

Този метод показва как моделът може да бъде използван както за ретроспективна оценка, така и за реално време на променящия се пазар, обслужвайки нуждите на прогностични и търговски стратегии.

РЕЗУЛТАТИ

Оценка на точността

За тестовия сет средните RMSE и MAE за акциите се движат в следните граници:

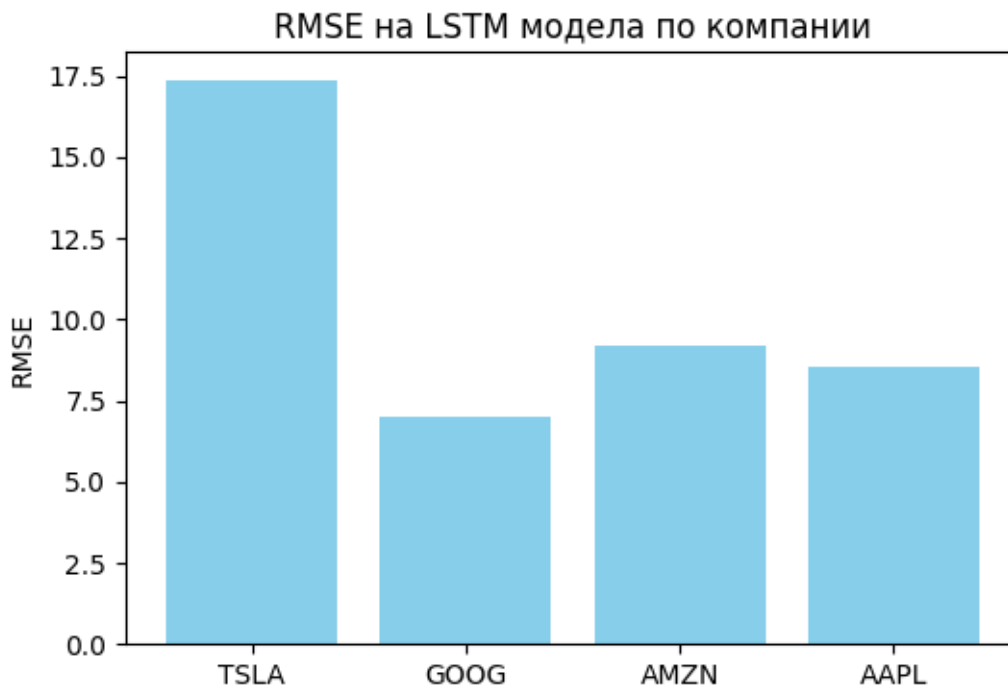
- TSLA: RMSE \approx 17.4 \$, MAE \approx 13.2 \$
- GOOG: RMSE \approx 7.0 \$, MAE \approx 5.6 \$
- AMZN: RMSE \approx 9.2 \$, MAE \approx 6.8 \$
- AAPL: RMSE \approx 8.5 \$, MAE \approx 6.7 \$

Високата абсолютна грешка при TSLA се дължи на по-големия ценови мащаб и волатилност. За по-справедливо сравнение използвахме и относителна грешка (MAPE), която

показва под 5 % средна отклонение за всички акции. Спадът на MSE и близките нива на RMSE и MAE потвърждават, че моделът предлага разумна точност за дневни ценови прогнози.

Визуализация на резултатите

Графиките „Loss по време на обучение“ демонстрират плавно сваляне на тренировъчната загуба (до 0.002–0.005) с почти същия тренд и на валидационната, което свидетелства за добро обобщаване. При TSLA и GOOG прогнозните криви почти се припокриват с истинските ценови редици, улавяйки както трайните трендове, така и средно-дневните колебания. Amazon и Apple също показват силна корелация между прогноза и действителност, макар леко заглаждане на екстремуми. Графиката на RMSE по компании визуално подрежда TSLA като най-сложен за прогнозиране, следван от AMZN, AAPL и GOOG.



Тези визуализации ясно илюстрират, че LSTM-моделът е в състояние да следва динамиката на пазара с малки систематични отклонения, подходящ както за стратегическо планиране, така и за по-дългосрочни предвиждания.

Обсъждане

Резултатите показват, че сравнително компактна LSTM-архитектура с двуслоен LSTM (32+32 единици), умерена L2-регуларизация и dropout (20–10 %) е способна да прогнозира цените на четири различни компании с репрезентативна точност. GOOG се оказа най-лесна за предвиждане (RMSE \approx 7 \$), вероятно заради по-стабилната му трендова компонента, докато TSLA демонстрира най-голяма грешка (RMSE \approx 17 \$), поради по-острата волатилност и високите цени.

Плавните криви на загубата и близките стойности между training и validation loss потвърждават, че overfitting е незначително, а underfitting — също. Визуализациите „Истинска vs. Прогнозирана цена“ илюстрират леко закъснение и заглаждане на екстремумите, но без систематични bias-и. Възможни подобрения включват:

1. **Допълнителни признаци:** технически индикатори (RSI, MACD), които да уловят моментум и резки колебания.
2. **Фино тунинговане:** grid search на L2, dropout и batch size, за да се намери идеалният trade-off между bias и variance.
3. **Алтернативна регресия:** използване на Huber loss или усилване чрез ensemble от няколко модела (LSTM + ARIMA).

4. **Multivariate подход:** обединяване на данни за всички компании в един мулти-изходен модел, който да учи общи пазарни зависимости.

Като цяло, представената методология и резултати са подходяща отправна точка за по-нататъшни изследвания в областта на финансовите времеви редове и приложение на невронни мрежи.

ИЗВОДИ

Настоящото изследване демонстрира ефективността на LSTM невронни мрежи при прогнозиране на цените на акции на водещи технологични компании. Моделът показва добра обобщаваща способност и висока точност на предсказанията, особено при компании със стабилни трендове като Google и Apple. Високите стойности на RMSE при Tesla се дължат на характерната за компанията висока волатилност. Включването на технически индикатори и мултивариантен анализ може да подобри представянето на модела в бъдещи разработки. Представената методология е стабилна основа за разширяване на прогнозните стратегии в реална търговска среда и може да бъде адаптирана към автоматизирани системи за вземане на инвестиционни решения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

REFERENCES

- Atsalakis, G. S., & Valavanis, K. P. (2009). Surveying stock market forecasting techniques—Part II: Soft computing methods. *Expert Systems with Applications*, 36(3), 5932-5941. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.07.006>
- Bao, W., Yue, J., & Rao, Y. (2017). A deep learning framework for financial time series using stacked autoencoders and long-short term memory. *PloS one*, 12(7), e0180944. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0180944>
- Fischer, T., & Krauss, C. (2018). Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions. *European Journal of Operational Research*, 270(2), 654-669. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.11.054>
- Gokulakrishnan, D., M, Anjhana, Agarwal, Ishita, Predictive Modelling of Financial Markets: Leveraging Neural Networks for Long-Term Stock Price Predictions (November 15, 2024). Proceedings of the 3rd International Conference on Optimization Techniques in the Field of Engineering (ICOFE-2024), <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.5088886>
- Hu, J. (2024). A High-Performance Stock Prediction System Leveraging LSTM Neural Networks. *Applied and Computational Engineering*, 114, 65-72, <https://doi.org/10.54254/2755-2721/2024.18219>
- Nelson, D. M., Pereira, A. C. M., & de Oliveira, R. A. (2017). Stock market's price movement prediction with LSTM neural networks. In 2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN) (pp. 1419-1426). IEEE. <https://doi.org/10.1109/IJCNN.2017.7966019>
- Pan, X. (2024) Stock Price Prediction System LSTM Based on Deep Learning, *Journal of Economics and Public Finance*, 10(4), p. 235. doi: 10.22158/jepf.v10n4p235
- Rundo, F., Trenta, F., Battiato, S., & Ortis, A. (2019). Machine learning for quantitative finance applications: A survey. *Applied Sciences*, 9(24), 5574. <https://doi.org/10.3390/app9245574>
- Sezer, O. B., Gudelek, M. U., & Ozbayoglu, A. M. (2020). Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005–2019. *Applied Soft Computing*, 90, 106181. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106181>

Zhang, Y., Aggarwal, C., & Qi, G. J. (2017). Stock price prediction via discovering multi-frequency trading patterns. Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2141-2149. <https://doi.org/10.1145/3097983.3098071>

STUDY ON THE IMPACT OF FOREIGN DIRECT INVESTMENT ON BULGARIA'S ECONOMIC GROWTH³

Debora Marinova

Financial Mathematics Student
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: ebi20022002@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse "Angel Kanchev"
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

***Abstract:** This study examines how foreign direct investment (FDI) in non-financial sector enterprises impacts Bulgaria's economic growth. The analysis of FDI as a driver of Bulgaria's gross domestic product (GDP) growth reveals the extent to which foreign capital contributes to the domestic economy. Annual data for the period 2008-2022 were used for the analysis.*

***Key words:** FDI, GDP, Economic growth, Statistical Analysis, Correlation Analysis.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Преките чуждестранни инвестиции (ПЧИ) представляват капиталови потоци от чуждестранни фирми или физически лица, насочени към придобиване на дългосрочен дял или контрол в предприятия в дадена страна. В България тези инвестиции изиграват ключова роля в икономическата трансформация след 1989 г., като подпомагат модернизацията на различни индустрии, включително енергетика, финанси и информационни технологии [1].

Исторически, България регистрира високи нива на ПЧИ през периода на приватизацията и след присъединяването си към ЕС през 2007 г. Основните сектори, които привличат чуждестранен капитал, са преработващата промишленост, търговията и недвижимите имоти [2]. Въпреки това, експерти посочват, че ефектът на инвестициите е неравномерно разпределен, като някои региони и отрасли остават слабо засегнати от положителните им влияния [3].

По данни на Националния статистически институт (НСИ) към 31.12.2023 г. ПЧИ в нефинансовия сектор в България възлизат на 32,57 млрд. евро по текущи цени, като основните инвестиции са насочени към промишлеността (13,53 млрд. евро) и сектора на услугите (7,79 млрд. евро), включващ търговия, ремонт на автомобили и мотоциклети, транспорт, складиране и пощи, хотелиерство и ресторантьорство [2].

Брутният вътрешен продукт (БВП) е макроикономически показател, който измерва общата стойност на всички произведени стоки и услуги в дадена държава за определен период. В тази работа е разгледан годишният БВП на България, изчислен от НСИ по производствения метод. По производствения метод БВП по пазарни цени се изчислява като сума от брутната добавена стойност по базисни цени общо за икономиката и корективите, които включват нето данъци върху продуктите, неприпадаем данък върху добавената стойност и мита върху вноса [2].

През 2023 г. брутният вътрешен продукт на България достига 185.2 млрд. лева, което представлява икономически ръст от 1.9% спрямо предходната година [2]. Според експресните оценки на НСИ за четвъртото тримесечие на 2024 г. най-голям дял в БВП по елементи на крайното използване заема крайното потребление - със 79.9%, докато бруто

³ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ИЗСЛЕДВАНЕ НА ВЛИЯНИЕТО НА ПРЕКИТЕ ЧУЖДЕСТРАННИ ИНВЕСТИЦИИ ВЪРХУ ИКОНОМИЧЕСКИЯ РАСТЕЖ НА БЪЛГАРИЯ.

капиталообразуването заема 23% относителен дял в БВП [2]. Външнотърговското салдо за през последното тримесечие на 2024 г. е отрицателно.

Чуждестранните инвестиции имат пряко въздействие върху икономическия растеж, тъй като стимулират производителността, създават работни места и улесняват достъпа до нови технологии [4]. Въпреки позитивния ефект, анализите подчертават, че прекомерната зависимост от външен капитал може да крие рискове, като намалена автономност на местната икономика и изтичане на печалби към чуждестранни компании [1].

ПЧИ и БВП са тясно свързани, като първите допринасят за икономическия растеж и модернизацията на страната. Въпреки това, дългосрочният ефект на чуждестранните инвестиции зависи от тяхното стратегическо управление и насочване към сектори с висока добавена стойност.

В настоящата работа е изследвано влиянието на преките чуждестранни инвестиции в предприятията от нефинансовия сектор като фактор за нарастване на брутния вътрешен продукт на България. Целта е да се проследи доколко чуждестранният капитал допринася за местната икономика. За анализа са използвани годишни данни за ПЧИ и БВП за периода 2008-2022 г.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В Таблица 1 са представени описателните статистики за БВП и ПЧИ за периода 2008-2022 г.

Средният размер на БВП е 8981,79 млн. лв., докато медианата е 6629 млн. лв.

Средният размер на ПЧИ е 4884,7 млн. лв., докато медианата е 3299 млн. лв.

Стандартното отклонение на БВП е 6972,263 млн. лв., а на ПЧИ 5561,728 млн. лв.

Коефициентът на вариация на БВП е 77,63%, а на ПЧИ е 113,86% (според критериите, извадката е нееднородна и по двата признака, тъй като стойностите надвишават 40%).

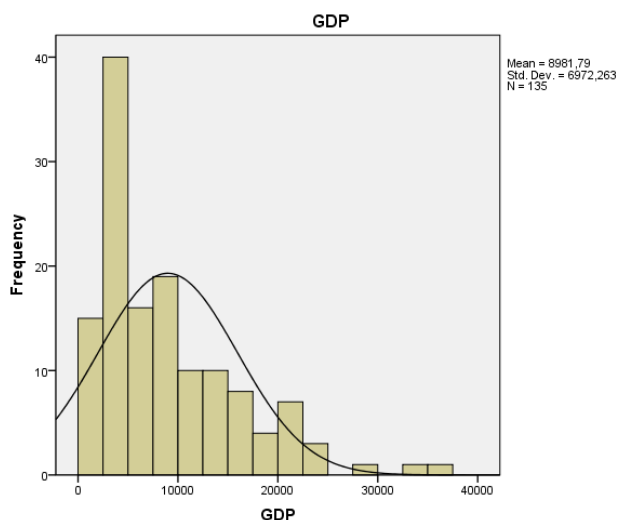
Таблица 1. Описателни статистики за БВП и ПЧИ.

| Показател | Средна стойност | Медиана | Стандартно отклонение | Коефициент на асиметрия | Коефициент на ексцес | Коефициент на вариация |
|-----------|-----------------|---------|-----------------------|-------------------------|----------------------|------------------------|
| БВП | 8981,79 | 6629 | 6972,263 | 1,391 | 1,918 | 77,63 |
| ПЧИ | 4884,7 | 3299 | 5561,728 | 1,292 | 0,909 | 113,86 |

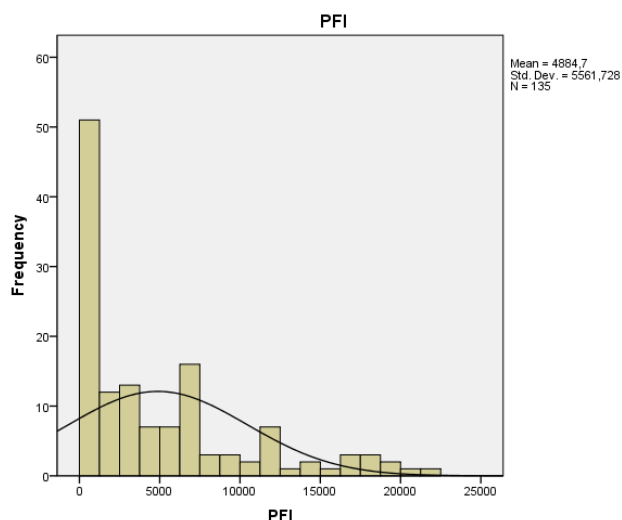
Коефициентът на асиметрия на БВП е 1,391, което означава, че разпределението има дясна (положителна) асиметрия, а докато при ПЧИ коефициентът е 1,292, което също показва дясна асиметрия ($\gamma_1 > 0$). Направена е проверка и е установено, че разпределението и на двете променливи не е нормално с гаранционна вероятност, близка до 100%.

Коефициентът на ексцес (excess kurtosis) на БВП е 1,918, което показва лептокуртично разпределение ($\gamma_2 > 0$). Това означава, че опашките на разпределението са по-тежки от нормалните, което сочи към наличие на екстремни стойности или по-голям риск от отклонения. При ПЧИ коефициентът на ексцес е 0,909 ($\gamma_2 > 0$), което също показва лептокуртично разпределение, но с по-слабо изразени тежки опашки в сравнение с БВП. Това предполага, че ПЧИ имат по-малко екстремни стойности спрямо БВП.

Графично данните са представени на Фигура 1 и Фигура 2.

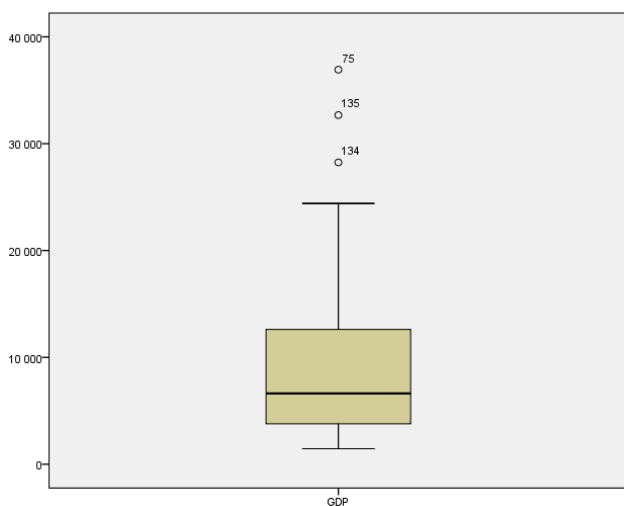


Фигура 1. Разпределение на БВП

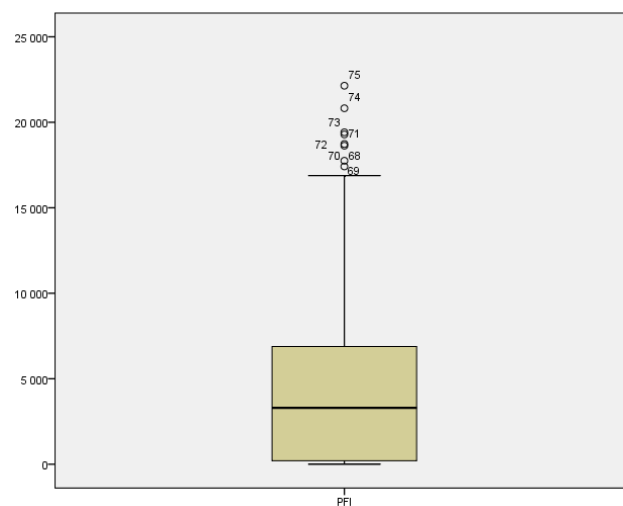


Фигура 2. Разпределение на ПЧИ

Направена е проверка за екстремни стойности, резултатите от която са представени на фигури 3 и 4. За БВП са установени 3 екстремни стойности, докато за ПЧИ екстремните стойности за разглеждания период са 8. Преди да се премине към следващата стъпка, включваща корелационен и регресионен анализ, екстремните стойности са приближени към съответните гранични стойности – 28244 млн. лв. за БВП и 17417 млн. лв. за ПЧИ.



Фигура 3. Екстремни стойности за БВП



Фигура 4. Екстремни стойности за ПЧИ

Корелационен и регресионен анализ

Направен е корелационен анализ, който показва, че коефициентът на корелация на Пирсън между БВП и ПЧИ за нефинансовия сектор в България е 0,753, като той е статистически значим с гаранционна вероятност над 99%. Следователно е налице силна, значима зависимост между БВП и ПЧИ за нефинансовия сектор в България.

Построен е линеен регресионен модел, който описва връзката между БВП и ПЧИ.

Таблица 2. Обобщени статистики за модела

| R | R ² | Изгладен R ² | Стандартна грешка на оценките |
|-------|----------------|-------------------------|-------------------------------|
| 0,753 | 0,567 | 0,564 | 4386.564 |

От таблица 2 се вижда, че изгладеният коефициент на детерминация на модела (Adjusted R Square) е 0,564, което показва, че около 56,4% от изменението в БВП се определя от изменение в ПЧИ.

Таблица 3. ANOVA таблица

| | Суми от квадрати | Степени на свобода | Суми от квадрати/ степени на свобода | F | Sig |
|------------|------------------|--------------------|--------------------------------------|---------|-------|
| Regression | 3353819270,641 | 1 | 3353819270,641 | 174,297 | 0,000 |
| Residual | 25591178473,093 | 133 | 19241943,407 | | |
| Total | 5912997743,733 | 134 | | | |

От таблица 3 може да се провери адекватността на регресионния модел. С гаранционна вероятност, близка до 100%, линейният модел е адекватен на съществуващата значима връзка между БВП и ПЧИ.

Таблица 4. Коефициенти на модела

| | Нестандартизирани коефициенти | | Стандартизирани коефициенти | | Sig. |
|------------|-------------------------------|---------------|-----------------------------|--------|-------|
| | B | Станд. грешка | Beta | t | |
| PFI | 0,949 | 0,072 | 0,753 | 13,202 | 0,000 |
| (Constant) | 4354,937 | 510,153 | | 8,537 | 0,000 |

В таблица 4 са дадени параметрите на модела, техните стандартни отклонения и t-стойностите:

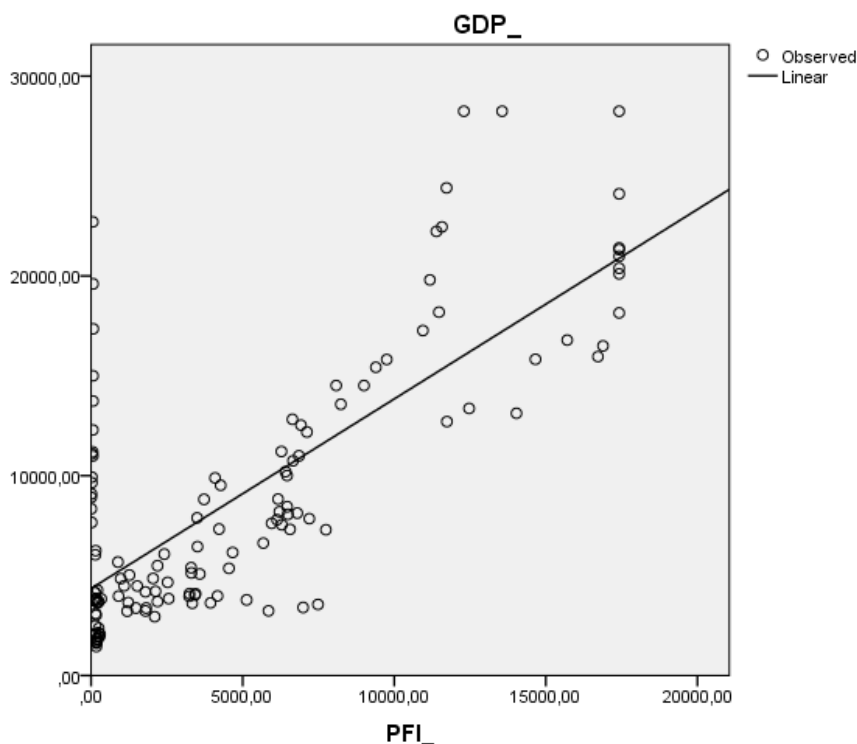
$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= 0,949, & \hat{\beta}_1 &= 4354,937, \\ \sigma_{\hat{\beta}_2} &= 0,072, & \sigma_{\hat{\beta}_1} &= 510,153, \\ t_{\hat{\beta}_2} &= 13,202, & t_{\hat{\beta}_1} &= 8,537. \end{aligned}$$

От таблица 4 може да се построи линията на регресия:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i = 4354,937 + 0,949 X_i.$$

От таблица 4 се вижда още, че коефициентите на модела са статистически значими с гаранционна вероятност, близка до 100%. Свободният член на модела показва, че при липса на чуждестранни инвестиции БВП би бил на стойност близо 4,355 млрд. лв. Старшият регресионен коефициент показва, че при увеличение на ПЧИ с 1 млн. лв. може да се очаква БВП да се повиши с 949 хил. лв.

Линейният регресионен модел е представен графично на фигура 5.



Фигура 5. Линеен регресионен модел

Забележка: С гаранционна вероятност близка до 100% е установено, че остатъците от модела не следват нормалното теоретично разпределение, откъдето следва, че интерпретирането им трябва да се извърши с голямо внимание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е изследвано влиянието на преките чуждестранни инвестиции в предприятията от нефинансовия сектор като фактор за нарастване на брутния вътрешен продукт на България за периода. От изследването могат да се направят следните изводи:

1. Пикът в разпределенията и на двете променливи е в ниските стойности, за което свидетелства положителният коефициент на асиметрия.
2. Положителните стойности на разпределенията на ПЧИ и БВП показват лептокуртично разпределение и са индикация за наличие на екстремни стойности. Разпределенията и на двете променливи имат тежки опашки, като по-тежки са тези на БВП.
3. В разпределението на ПЧИ има 8 екстремни стойности, докато в разпределението на БВП за периода екстремните стойности са 3. За целите на анализа, те са приближени до съответната гранична стойност.
4. Изгладеният коефициент на детерминация показва, че около 56,4% от изменението в БВП се определя от изменение в ПЧИ.
5. Построеният линеен регресионен модел показва, че при увеличение на ПЧИ с 1 млн. лв. може да се очаква БВП да се повиши с 949 хил. лв.

Авторите планират бъдещи изследвания на влиянието на ПЧИ върху БВП на България по отрасли, както и по региони.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

REFERENCES

- [1] Младенова, З., 2006. Преките чуждестранни инвестиции в българската икономика: Въпроси на оценката. Researchgate, <<https://www.researchgate.net/publication/281971258>>.
- [2] Национален статистически институт, <<https://www.nsi.bg/>>.
- [3] Колев, К., 2022. Вносът на преки чуждестранни инвестиции като фактор на растежа на производството в икономиките на регионите в България. Известия списание на Икономически университет 4 (2022), Варна, pp. 300-318, <https://journal.ue-varna.bg/uploads/20221214012248_4776771366399ce289f091.pdf>.

A RESEARCH ON HOUSE PRICE INDEX IN BULGARIA BY REGIONS⁴

Georgi-Ventsislav Penev

Financial Mathematics Student
 Department of Applied Mathematics and Statistics,
 University of Ruse “Angel Kanchev”
 E-mail: gvencipenev@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
 University of Ruse “Angel Kanchev”
 E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

***Abstract:** Housing not only provides living space, but also has important economic importance. The housing market provides a significant number of jobs and contributes to economic growth in the country. This study uses the general house price index (HPI) as a tool for quantitatively assessing the dynamics in different geographical regions of Bulgaria for the period 2017-2024. The HRI is analyzed in the context of the economic factors affecting the housing market in Bulgaria. Two possible scenarios for the development of the residential property market in Bulgaria over the next five years are derived and recommendations are made to those wishing to invest in residential property.*

***Key words:** Index Research, House Price Index (HPI), Real Estate, New Housing, Existing Housing, Regional Statistics.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Откакто съществува, човекът търси убежище и подслон, който да го пази от хищници и метеорологичните условия. Това е и една от причините жилищата да са от основните потребности на човека - те ни предоставят защита и уют. В днешно време жилищата имат и голямо икономическо значение. Жилищният пазар осигурява значителен брой работни места и допринася за икономическия растеж в страната. Също така той позволява жилищата да бъдат използвани като средство за инвестиране и осигуряване на финансова стабилност и сигурност. Това показва, че жилищата не само ни предоставят пространство за живеене, но имат и важни икономически и социални аспекти [1].

Настоящото изследване обхваща тримесечни данни от Националния статистически институт (НСИ, вж. [2]) за общия индекс на цени на жилища (ИЦЖ) за периода 2017 – 2024 година. ИЦЖ са показатели за изменението на пазарните цени жилищата (новопостроени и съществуващи), закупени от домакинствата. В изпълнение на изискванията на Регламент (ЕС) № 2015/2010 от началото на 2017 г. е сменена базисната година за Индекси на цени на жилища (ИЦЖ) и всички индекси се изчисляват и публикуват при база 2015 година [2]. ИЦЖ са верижно обвързани индекси, изчислявани по формулата на Ласпер.

$$HPI = \frac{\sum(p_t \cdot q_0)}{\sum(p_0 \cdot q_0)} \cdot 100$$

HPI - Ласперов ценови индекс

p_t - цени през текущия период

p₀ - цени през базисния период (2017 г.)

q₀ - количества от базисния период (фиксиран)

⁴ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ИЗСЛЕДВАНЕ НА ИНДЕКСА НА ЖИЛИЩНИТЕ ЦЕНИ В БЪЛГАРИЯ ПО РЕГИОНИ.

Освен индекса на жилищните цени, в настоящата статия са разгледани още икономическите фактори, влияещи на пазара на жилища в България. Въз основа на анализирания данни и текущите икономически тенденции са изведени два възможни сценария за развитието на пазара на жилищни имоти в България през следващите пет години и са отправени препоръки към желаещите да инвестират в жилищни имоти.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Настоящото изследване използва индекса на цените на жилищата (House Price Index, HPI) като инструмент за количествена оценка на динамиката в различните географски райони на България. Разделението се осъществява на шест района според класификацията на териториалните единици за статистически цели:

- Северозападен район(NW);
- Северен централен район(NC);
- Североизточен район(NE);
- Югоизточен(SE);
- Южен централен район(SC);
- Югозападен район(SW).

За разглеждания период средната стойност на ИЦЖ на национално ниво е 146,651%. Най-ниската му стойност, която се наблюдава през първото тримесечие на 2017 г. в Северозападния район, е 104,72%. Най-високата стойност на индекса е 254,05% и се наблюдава през четвъртото тримесечие на 2024 г. в Югозападния район. Тези статистики сочат, че пазарът на жилища в България показва стабилен и дългосрочен растеж.

В Таблица 1 са дадени описателните статистики за ИЦЖ за периода по региони.

Таблица 1. Описателни статистики за ИЦЖ по региони

| Регион | N | Средна стойност | Стандартно отклонение | Асиметрия | Ексцес | Коефициент на вариация |
|--------|----|-----------------|-----------------------|-----------|--------|------------------------|
| NC | 32 | 141,5253 | 27,05348 | 0,714 | -0,640 | 19,12 |
| NE | 32 | 148,7806 | 30,86182 | 1,034 | 0,036 | 20,74 |
| NW | 32 | 140,0494 | 26,79819 | 0,680 | -0,699 | 19,13 |
| SC | 32 | 148,1444 | 26,97258 | 0,603 | -0,467 | 18,21 |
| SE | 32 | 133,9594 | 24,66188 | 0,997 | -0,261 | 18,41 |
| SW | 32 | 167,4469 | 40,27612 | 0,709 | -0,592 | 24,05 |

Направена е проверка за нормалност на разпределението на ИЦЖ по региони и е установено, че за всички региони разпределението на ИЦЖ е близо до нормалното теоретично разпределение с гаранционна вероятност близка до 100%.

По-долу е даден детайлен преглед на основните статистически показатели за всеки регион:

Югозападен регион (SW)

Средна стойност (HPI): 167,45

Медиана: 156,67

Стандартно отклонение: 40,28

Коефициент на вариация: 24,05%

Този регион има най-висока средна стойност на индекса на цените на жилищата, което е очаквано, тъй като включва София – столицата и най-голям икономически център в страната. Високото стандартно отклонение и коефициент на вариация показват голяма променливост на цените във времето. Това може да се дължи както на по-високо търсене, така и на нестабилност в някои периоди.

Североизточен регион (NE)

Средна стойност: 148,78

Медиана: 134,44

Стандартно отклонение: 30,86

Коефициент на вариация: 20,74%

Цените в този регион също са сравнително високи. Това може да се обясни с развитието на градове като Варна, които имат силно туристическо и икономическо значение. Медианата е доста под средната стойност, което може да е индикация за наличие на изключително високи стойности (outliers), повдигащи средното.

Южен централен регион (SC)

Средна стойност: 148,14

Медиана: 141,32

Стандартно отклонение: 26,97

Коефициент на вариация: 18,21%

Този регион показва относително стабилни цени на жилищата, със сравнително нисък коефициент на вариация, което говори за постоянство във времето. Средната стойност и медианата са близки, което показва балансирано разпределение на цените без големи аномалии.

Северен централен регион (NC)

Средна стойност: 141,53

Медиана: 131,95

Стандартно отклонение: 27,05

Коефициент на вариация: 19,12%

Този регион има умерени стойности, както по отношение на средната цена, така и на променливостта. Данните предполагат сравнително предвидим пазар, без резки изменения.

Северозападен регион (NW)

Средна стойност: 140,05

Медиана: 132,43

Стандартно отклонение: 26,80

Коефициент на вариация: 19,13%

Въпреки че този регион обикновено е сред икономически най-слабо развитите, НРІ е близък до този в Северен централен регион. Това може да е резултат от бавно наваксване в цените или други локални фактори.

Югоизточен регион (SE)

Средна стойност: 133,96

Медиана: 121,12

Стандартно отклонение: 24,66

Коефициент на вариация: 18,41%

Този регион има най-ниска средна стойност на НРІ сред всички. По-ниските цени и умерена вариация предполагат, че регионът не е преживял сериозен натиск от страна на пазара, поне през анализирания период.

Направена е проверка на хипотези относно разлика в средната стойност на ИЦЖ по региони спрямо страната. В таблица 2 са представени изчисленото от SPSS [3] ниво на значимост и разликите в средните стойности на всеки регион спрямо средната стойност на ИЦЖ за страната (146,651%).

Таблица 2. Проверка на хипотези за средна стойност на ИЦЖ по региони

| Регион | Стойност от $H_0 = 146,651$ | | | | | | |
|--------|-----------------------------|--------------------|------------|----------------|--|---------------|---------|
| | t-стойност | Степени на свобода | p-стойност | Средна разлика | 95% доверителен интервал за средната разлика | | |
| | | | | | Долна граница | Горна граница | |
| NC | HPI | -1,072 | 31 | 0,292 | -5,12569 | -14,8795 | 4,6281 |
| NE | HPI | 0,390 | 31 | 0,699 | 2,12962 | -8,9972 | 13,2565 |
| NW | HPI | -1,394 | 31 | 0,173 | -6,60163 | -16,2634 | 3,0602 |
| SC | HPI | 0,313 | 31 | 0,756 | 1,49337 | -8,2313 | 11,2180 |
| SE | HPI | -2,911 | 31 | 0,007 | -12,69163 | -21,5832 | -3,8001 |
| SW | HPI | 2,921 | 31 | 0,006 | 20,79588 | 6,2748 | 35,3170 |

Нивото на значимост в регионите Югоизточен (SE) и Югозападен (SW) е по-малко от 0,01, което показва, че с гаранционна вероятност 99% в тези региони има статистически значими различия спрямо стойността на ИЦЖ на национално ниво. В останалите региони наблюдаваните различия не са статистически значими.

В Югоизточния регион разликата спрямо националната стойност на ИЦЖ е отрицателна, което показва, че индексът там е по-нисък.

В Югозападния регион средният ИЦЖ за периода е по-висок от този за страната. Причината е, че София и околните ѝ територии оформят ядрото на този район. Това е най-динамично развиващият се жилищен пазар в страната, със значителен ръст както в цените, така и в обема на сделките.

Икономически фактори, влияещи на пазара на жилища в България

Пазарът на жилищни имоти е чувствителен към множество макроикономически променливи. Разглеждането на тези фактори е от съществено значение за разбиране на наблюдаваните регионални и времеви различия в индекса на цените на жилищата.

Инфлацията е един от основните двигатели на растежа на цените на активи, включително недвижими имоти. През последните години (особено 2021-2023) инфлацията в България достигна нива, невиджани от десетилетия. Това доведе до покачване на строителните материали, пренасочване на капиталите от депозити към „твърди“ активи като имоти и психологически натиск за покупка „сега“, преди цените да се повишат още.

Ниските лихви в периода след 2015 г. създадоха благоприятна среда за ипотечно кредитиране. Резултатите са: увеличено търсене на жилища, особено в по-големите градове; улеснен достъп до финансиране за млади семейства; разширяване на пазара с нови купувачи, които иначе не биха могли да си позволят имот. Въпреки това, повишението на основните лихви в края на 2022 и началото на 2023 доведе до леко охладняване на пазара, особено в по-слабо икономически активните райони.

Брутният вътрешен продукт (БВП) на глава от населението и ръстът на заплатите имат директно влияние върху способността на населението да инвестира в имоти. Според данните на НСИ [2], периодът между 2015 и 2022 се характеризира с плавно, но стабилно нарастване на доходите, което се отразява позитивно на пазара на недвижими имоти. Разликите между столицата и провинцията остават съществени – София, Пловдив и Варна привличат не само вътрешни мигранти, но и външни инвестиции, което води до дисбаланси в цените на жилищата между регионите.

Намаляващото население, отрицателният естествен прираст и емиграцията са дългосрочни демографски предизвикателства. В Северозападен и Северен централен район, например, броят на населението рязко спада, което води до свръхпредлагане на имоти и задържане на цените. Обратно – районите около София и Пловдив регистрират население в растеж, което автоматично повишава търсенето на жилища.

Чуждестранното участие на пазара – особено в морските и ски курортите – се отразява на сезонните флукутации и повишава цените в специфични райони като Бургас, Варна и Банско. Това обяснява известна нестабилност в тези региони, която не се наблюдава в по-малко атрактивните вътрешни територии.

Прогнози и сценарии за развитие на пазара на жилища (2025-2030)

Въз основа на анализиранияте данни и текущите икономически тенденции могат да се изведат няколко възможни сценария за развитието на пазара на жилищни имоти в България през следващите пет години. Прогнозите се базират на предположения за икономически растеж, лихвена политика, демография и инвестиционен интерес.

Сценарий 1: Умерен растеж (най-вероятен)

Българската икономика продължава да расте със стабилен, макар и скромно темп (~2–3% годишно). Очаква се индексът на жилищните цени да нараства с около 4–6% годишно в национален мащаб. София, Пловдив и Варна ще продължат да водят пазара. В провинцията ще има по-бавен, но стабилен ръст, особено в добре свързани с инфраструктурата градове.

Сценарий 2: Бум в резултат на инвестиции и миграция

Този сценарий е свързан с ускорената дигитализация, новите индустриални зони, връщането на българи от чужбина. При него се очаква годишен ръст в индекса на жилищните цени от 8–10% в по-развитите райони. Тук трябва да се отчете рискът от прегряване на пазара, особено в София и морските курорти.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В тази статия е изследван индексът на цените на жилищата (House Price Index, HPI) за периода 2017-2024 г. като инструмент за количествена оценка на динамиката в различните географски райони на България. Той е анализиран в контекста на икономическите фактори, влияещи на пазара на жилища в България. Въз основа на направения анализ, могат да се обобщят следните изводи:

1. Пазарът на жилища в България показва стабилен и дългосрочен растеж.
2. В Югоизточния и Югозападния регион има статистически значими различия спрямо стойността на ИЦЖ на национално ниво. В Югозападния регион средният ИЦЖ за периода е по-висок от този за страната - това е най-динамично развиващият се жилищен пазар в страната, със значителен ръст както в цените, така и в обема на сделките. В Югоизточния регион средният ИЦЖ за периода е под стойността на ИЦЖ за страната, но отново значително над 100%. По-ниските цени и умерена вариация в Югоизточния регион предполагат, че регионът не е преживял сериозен натиск от страна на пазара, поне през анализирания период.
3. Икономическите фактори – инфлация, доходи, лихви – имат съществено влияние, като в последните години допринасят за ускорено търсене на имоти.
4. Пазарът е все по-чувствителен към глобалните процеси, като чуждестранните инвестиции и туристическия натиск.

Могат да бъдат направени следните препоръки към инвестиращите в имоти:

1. **Дългосрочни инвестиции:** Районите с университети, индустриални паркове и добро здравеопазване са най-подходящи за дългосрочно отдаване под наем и стабилен ръст на стойността.
2. **Диверсификация:** Комбинирането на имоти в различни региони намалява риска от локални спадове. Инвеститорите могат да балансират между високо-динамични и по-слаборазвити, но евтини пазари.
3. **Внимание при краткосрочни сделки:** В периоди на икономическа несигурност или при покачване на лихвите е препоръчително да се избягват спекулативни покупки с очакване за бърза препродажба.

4. **Технологична и енергийна ефективност:** Новото строителство с фокус върху „умни“ технологии и енергийна ефективност става все по-привлекателно за наематели и купувачи.

5. **Следене на държавната политика:** Регулации, субсидии за млади семейства, промени в ДДС и достъп до финансиране могат да окажат силно влияние върху търсенето.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

REFERENCES

[1] Д. Бозева, Статистическо изследване на цените на жилищата в България, Недвижими имоти & Бизнес, Том VII (2) 2023, стр. 140-143.

[2] Национален Статистически институт, <<https://nsi.bg/bg/content/13026/>>

[3] IBM SPSS Statistics, <<https://www.ibm.com/products/spss-statistics>>

VOLATILITY ANALYSIS OF GOLD AND SILVER PRICES USING ARCH AND GARCH MODELS⁵

Preslava Daneva

Financial Mathematics Student
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: danevapreslava@gmail.com

Pr. Assist. Prof. Vesela Mihova, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: vmicheva@uni-ruse.bg

***Abstract:** Precious metals such as gold and silver hold strategic importance for the global economy due to their rarity, durability, and unique physico-chemical properties. The aim of this report is to analyze the volatility of historical annual prices of gold and silver using ARCH and GARCH models. By comparing the results of the two models through statistical criteria such as AIC, BIC, and the log-likelihood function, the goal is to determine which model is more suitable for capturing the variability in the returns of the two metals.*

***Key words:** Gold, Silver, ARCH, GARCH, Volatility.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Благородните метали като злато и сребро имат ключова роля в икономиката, благодарение на своята рядкост, устойчивост и притежаване на уникални физични и химични свойства. Златото е на водещо място сред тях с хилядолетна история като платежно средство и символ на стойност. От древността до днес, то се използва за сечене на монети, обвързване на валути и натрупване на богатство. След разпадането на златния стандарт през 70-те години на XX век златото запази ролята си на монетарен актив като основен елемент в резервите на централните банки и предпочитан инструмент за защита срещу инфлация, валутни колебания и геополитическа нестабилност [1], [3]. Освен за инвестиции, златото има приложение и в електрониката, аерокосмическата индустрия и медицината, заради своята отлична електропроводимост и устойчивост на корозия [1].

Среброто също има стратегическо значение, тъй като се използва с инвестиционна стойност и широка индустриална употреба. То е най-добрият електропроводник сред всички елементи, което го прави незаменимо в сектори като соларната енергия, електрониката, автомобилната индустрия и медицината. През 2024 г. индустриалното търсене достига рекордните 680,5 милиона унции. В същото време, среброто има и монетарна функция, като се използва за изработка на кюлчета и инвестиционни монети. За разлика от златото, обаче, търговията със сребро в повечето държави е облагана с ДДС, което го поставя в по-неблагоприятна позиция като инвестиционен актив [2].

Към април 2025 г. цената на среброто е около 33,09 щ.д. за тройунция, а на златото – над 3500 щ.д. Съотношението между тях надхвърля 100:1 – далеч над историческите норми от 15:1 до 30:1, което подсказва потенциално подценяване на среброто [1], [2]. В земната кора природното съотношение между наличностите на злато и сребро е приблизително 1:19 [4], което допълнително подчертава пазарния дисбаланс.

Целта на настоящия доклад е да се анализира волатилността на историческите годишни цени на злато и сребро чрез модели от семейството на условната хетероскедастичност –

⁵ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: АНАЛИЗ НА ВОЛАТИЛНОСТТА НА ЦЕНИТЕ НА ЗЛАТО И СРЕБРО С ARCH И GARCH МОДЕЛИ.

ARCH(1) и GARCH(1,1). Чрез сравнение на резултатите от двата модела с помощта на статистически критерии като AIC, BIC и логаритмична функция на вероятността, се цели да се определи кой от тях е по-подходящ за моделиране на изменчивостта на доходността на двата метала.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Използвани са годишни данни за цените на злато и сребро в периода 1833 – 2024 г. (вж. [7] и [8]). Изчислена е годишната доходност на цените на златото и среброто, използвайки следната формула:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot 100,$$

където R_t е доходността за година t , P_t е цената в година t , P_{t-1} е цената в предходната година.

На фигура 1 е показана годишната доходност на среброто и златото за разглеждания период. На графиката се наблюдава значителен скок през 70-те години на 20-ти век. Това явление може да бъде обяснено с няколко ключови икономически и политически събития, които оказват силно въздействие върху пазарите на благородни метали. През 1971 г. президентът на САЩ Ричард Никсън слага край на Бретън-Уудската система, официално прекратявайки обвързването на американския долар със златото, което води до преход към свободно търгуван пазар на злато [5]. Цената на метала започва да се определя от търсенето и предлагането, а не от фиксиран обменен курс. Освен това, втората половина на 70-те години е белязана от висока инфлация и икономическа несигурност в Съединените щати, което подтиква инвеститорите да търсят защита на стойността на капитала си чрез активи като злато и сребро [6]. Допълнително, в края на десетилетието се наблюдава засилена спекулативна активност на пазарите на благородни метали, особено при среброто, където братята Нелсън и Уилям Хънт се опитват да монополизират пазара, довеждайки до рязък скок в цената му до 1980 г. [9].



Фигура 1. Годишна доходност на среброто и златото

Проверка за наличие на променлива волатилност (хетероскедастичност)

Нормите на възвращаемост на златото и среброто са изследвани за наличието на променлива волатилност (хетероскедастичност) с помощта на ARCH тест (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Тестът има за цел да установи дали волатилността на доходността се променя през времето, което е характерно за финансовите активи.

Таблица 1. Резултати от ARCH теста

| Метал | Статистика на теста | p -стойност |
|--------|---------------------|------------------------|
| Злато | 38,2612 | $6,188 \cdot 10^{-10}$ |
| Сребро | 41,5555 | $1,146 \cdot 10^{-10}$ |

От таблица 1 се вижда, че p -стойностите са много по-малки от обичайния праг на значимост (0.05), което потвърждава наличието на значим ефект на променливата волатилност (хетероскедастичност) в доходността на двата метала. Това оправдава използването на модели като ARCH и GARCH за анализ на волатилността в следващите стъпки.

Проверка на стационарността

ARCH и GARCH моделите изискват доходностите да бъдат стационарни във времето (т.е. статистиките като средна стойност и дисперсия да не се променят с времето). Поради тази причина нормите на възвращаемост на златото и среброто са проверени за стационарност с помощта на ADF тест (Augmented Dickey-Fuller).

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

В таблица 2 са представени резултатите от ADF теста. От таблицата се вижда, че данните и за двата метала са стационарни.

Таблица 2. Резултати от ADF теста

| Мярка/ Параметър | ADF статистика | p -стойност (ADF) | Критични стойности | ADF заключение |
|---------------------|-------------------|------------------------|-----------------------|----------------|
| Злато | -3,3606 | 0,0124 | 5%: -2,877 | Стационарна |
| Сребро | -9,6823 | 0,0124 | 5%: -2,877 | Стационарна |

Построяване на ARCH и GARCH модели

След като сме уверени, че данните са стационарни, можем да приложим моделите ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) и GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity).

Предполагаме следния ARCH модел:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2,$$

където: r_t - доходността в момент t ; μ - средната доходност (често близо до 0); ε_t - грешка в доходността; h_t - условната дисперсия (волатилност) в момент t ; ω - постоянна стойност; α_1 - коефициент, който показва колко силно влияят предишните грешки върху текущата волатилност.

ARCH моделът улавя ефекта на миналите грешки върху настоящата волатилност. Ако α_1 е значим, това означава, че волатилността не е постоянна, а се променя с времето в зависимост от предходната нестабилност. Това е типично за финансови данни, където периоди на висока нестабилност се следват от други такива.

Таблица 3. Резултати от ARCH(1) моделите

| Стойности / Метал | μ | | ω | | α_1 | | Log-Likelihood | AIC | BIC |
|----------------------|---------|------------|----------|------------|------------|------------|----------------|---------|---------|
| | коэф. | p-стойност | коэф. | p-стойност | коэф. | p-стойност | | | |
| Злато | -0,4171 | 0,241 | 10,7918 | 0,03262 | 1,000 | 0,00000047 | -607,061 | 1220,12 | 1229,88 |
| Сребро | -0,0543 | 0,956 | 89,4221 | 0,00823 | 1,000 | 0,01666 | -774,237 | 1554,47 | 1564,23 |

В таблица 3 са представени резултатите от ARCH(1) моделите за златото и среброто. От таблицата се вижда, че моделът ARCH(1) за златото има вида:

$$r_t = -0.4171 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = 10.7918 + 1.0000 \cdot \varepsilon_{t-1}^2.$$

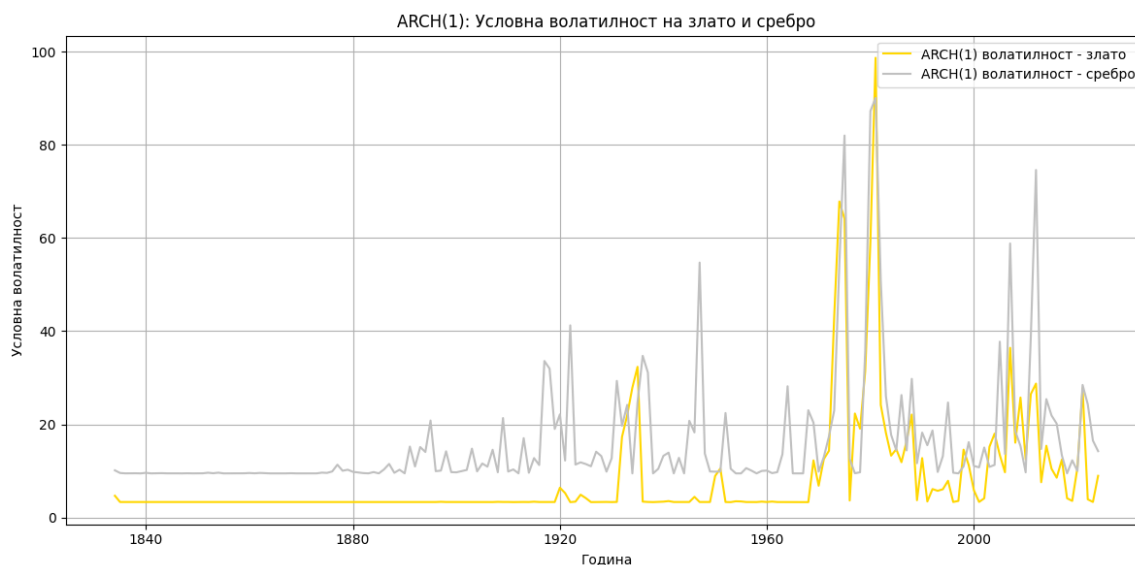
Таблица 3 показва още, че моделът ARCH(1) за среброто има вида:

$$r_t = -0.0543 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = 89.4221 + 1.0000 \cdot \varepsilon_{t-1}^2.$$

P-стойностите в таблица 3 показват, че и за двата метала средната доходност μ е статистически равна на 0, а параметрите ω и α_1 са статистически значими с гаранционна вероятност над 95%.

На фигура 2 се вижда условната волатилност на златото и среброто при ARCH(1) модели.



Фигура 2. Условната волатилност на златото и среброто при ARCH(1) модели.

Предполагаме следния GARCH модел:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1},$$

където: r_t - доходността в момент t ; μ - средната доходност (често близо до 0); ε_t - грешка в доходността; h_t - условната дисперсия (волатилност) в момент t ; ω - постоянна стойност; α_1 -

коэффициент, който показва колко силно влияят предишните грешки върху текущата волатилност; β_1 - показва колко от предишната волатилност (вариация) се пренася напред във времето.

GARCH(1,1) моделът разширява ARCH, като добавя зависимост и от предходната условна волатилност, освен от грешката. Това дава по-гъвкав и реалистичен модел на финансовата волатилност, където нестабилността не се влияе само от неочаквани събития, но и от натрупания ефект на предходната нестабилност.

Таблица 4. Резултати от GARCH(1,1) моделите

| Стойности / Метал | μ | | ω | | α_1 | | β_1 | | Log-Likelihood | AIC | BIC |
|----------------------|---------|------------|----------|------------|------------|------------|-----------|------------|----------------|---------|---------|
| | коэф. | р-стойност | коэф. | р-стойност | коэф. | р-стойност | коэф. | р-стойност | | | |
| Злато | -0,0169 | 0,947 | 2,8359 | 0,284 | 0,5607 | 0,00049 | 0,4393 | 0,03756 | -575,663 | 1159,33 | 1172,34 |
| Сребро | 0,0497 | 0,749 | 0,1232 | 0,358 | 0,2764 | 0,100 | 0,7236 | 0,00069 | -713,093 | 1434,19 | 1447,20 |

От таблица 4 се вижда, че моделът GARCH(1,1) за златото има вида:

$$r_t = -0.0169 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = 2.8359 + 0.5607\varepsilon_{t-1}^2 + 0.4393h_{t-1}.$$

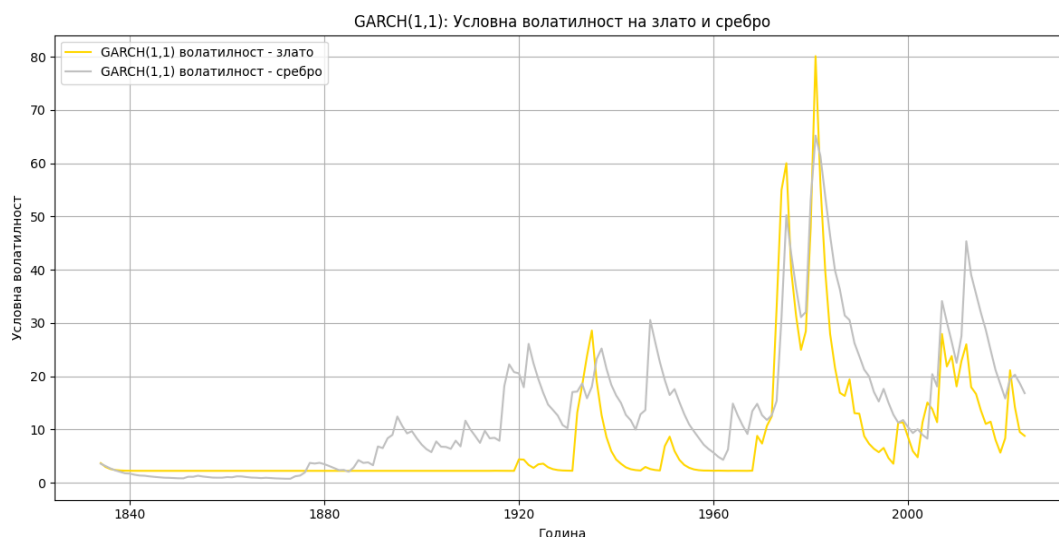
От таблица 4 се вижда, че моделът GARCH(1,1) за среброто има вида:

$$r_t = -0.0497 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = 0.1232 + 0.2764\varepsilon_{t-1}^2 + 0.7236h_{t-1}.$$

И при GARCH моделите р-стойностите в таблица 4 показват, че и за двата метала средната доходност μ е статистически равна на 0, като параметърът ω също е статистически равен на 0 с гаранционна вероятност над 95%. Що се отнася до параметрите α_1 и β_1 , те са статистически значими с гаранционна вероятност над 95%, с изключение на параметъра α_1 при среброто, който също може да се каже, че е статистически значим, но с гаранционна вероятност 90%.

На фигура 3 се вижда условната волатилност на златото и среброто при GARCH(1,1) модели.

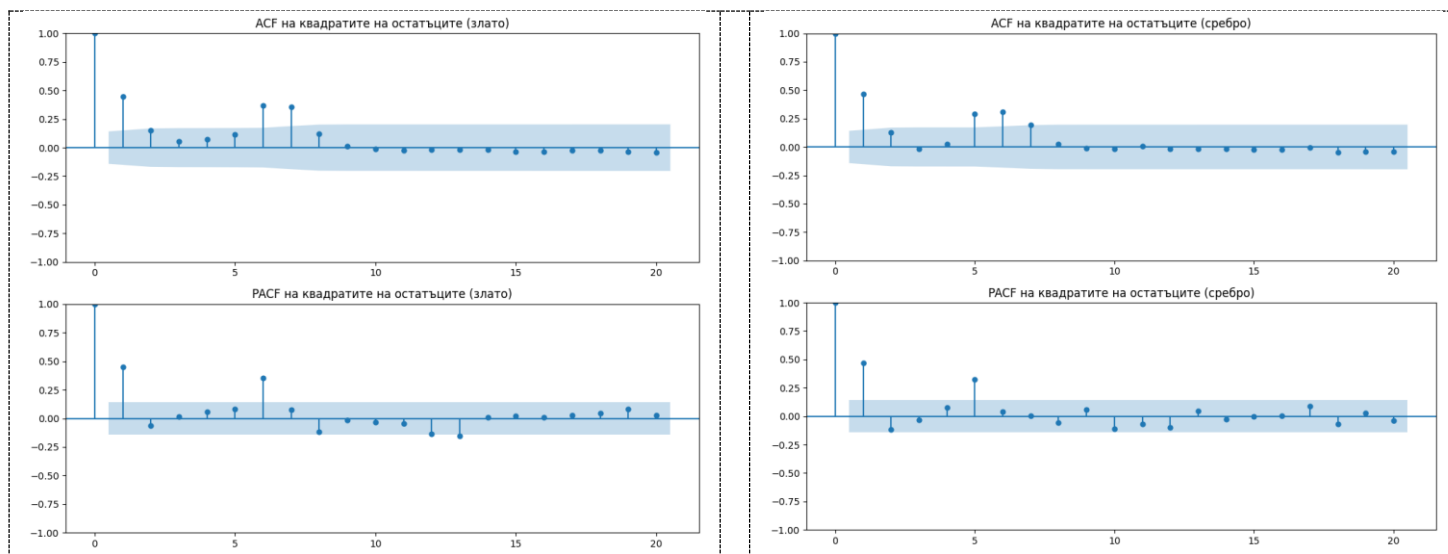


Фигура 3. Условната волатилност на златото и среброто при GARCH(1,1) модели.

Разгледани са автокорелационната и частично автокорелационната функции (ACF и PACF) на квадратите на остатъците за двата модела за всеки от металите. Тези функции зависят от фиксиран брой лагове и се изчисляват за всеки момент t , с изключение на някои крайни, където не могат да се изчислят. Големи скокове и повтарящи се шаблони в автокорелационните и частично автокорелационните функции указват приблизителните стойности на параметрите в моделите [10].

ACF и PACF на квадратите на остатъците за модел GARCH(1,1) за златото са представени на фигура 4а). Забелязва се значителен скок на първото наблюдение и не чак толкова голям, но ясно изразен скок и при второто наблюдение, както при ACF, така и при PACF. Това може да се приеме като индикация за необходимост от GARCH(1,1).

ACF и PACF на квадратите на остатъците за модел GARCH(1,1) за среброто са представени на фигура 4б). И тук, както при златото, е налице значителен скок на първото наблюдение и по-малък скок при второто наблюдение, както при ACF, така и при PACF. Това предполага модел на GARCH (1,1).



Фигура 4. ACF и PACF на квадратите на остатъците за GARCH(1,1): а) за златото; б) за среброто

Забележка: ACF и PACF графиките на квадратите на остатъците за модел ARCH(1) за златото и среброто изглеждат много сходно с фигура 4.

Избор на оптимален модел

След като сме приложили и двата модела, може да изберем най-добрия чрез критерии като:

- Логаритмична вероятност: Колкото по-висока е логаритмичната вероятност, толкова по-добре моделът обяснява данните.
- AIC (Akaike Information Criterion): Измерва баланса между точността на модела и броя на параметрите.

$$AIC = -2 \cdot \log(L) + 2 \cdot k,$$

където: k е броят на параметрите в модела, L е максималната стойност на вероятностната функция за разглеждания модел. По-ниската стойност на AIC показва по-добър модел.

- BIC (Bayesian Information Criterion): широко използван като критерий за избор на модел. Той може да се прилага за оценка на модели чрез метода на максималната вероятност (метод за оценка на неизвестен параметър чрез максимизиране на функцията на вероятността) [10]. Критерият има следния вид

$$BIC = -2 \cdot \log(L) + k \cdot \ln(n),$$

където: k е броят на параметрите в модела, L е максималната стойност на вероятностната функция за разглеждания модел, n е размерът на извадката. По-малките стойности на критерия показват по-добри модели. BIC "наказва" свръхпараметризираните модели.

Сравняваме тези критерии, за да определим кой модел (ARCH или GARCH) е най-подходящ за анализа на волатилността на цените на злато и сребро.

От таблица 5 се вижда, че моделът **GARCH(1,1)** превъзхожда **ARCH(1)** както при златото, така и при среброто. Това се потвърждава от:

- По-ниски стойности на AIC и BIC, което предполага по-добър баланс между сложност и точност;
- По-високи стойности на логаритмичната вероятност, което показва по-добро съответствие с реалните данни;
- При GARCH(1,1) сумата $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, което показва, че моделите са на границата на стационарност. Въпреки това, GARCH моделът е по-гъвкав и по-добре улавя динамиката на волатилността в сравнение с ARCH(1), при който α_1 достига също 1,000, което предполага висока инерция и потенциална нестабилност.

Таблица 5. Обобщение на моделите за златото и среброто

| Метал | Модел | μ | ω | α_1 | β_1 | AIC | BIC | Log-Likelihood |
|--------|------------|---------|----------|------------|-----------|---------|---------|----------------|
| Злато | ARCH(1) | -0,4171 | 10,7918 | 1,0000 | - | 1220,12 | 1229,88 | -607,061 |
| | GARCH(1,1) | -0,0169 | 2,8359 | 0,5607 | 0,4393 | 1159,33 | 1172,34 | -575,663 |
| Сребро | ARCH(1) | -0,0543 | 89,4221 | 1,0000 | - | 1554,47 | 1564,23 | -774,237 |
| | GARCH(1,1) | -0,0543 | 0,1232 | 0,2764 | 0,7236 | 1434,19 | 1447,20 | -713,093 |

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа е направен анализ на волатилността на историческите годишни цени на злато и среброто за периода 1833 – 2024 г.

- Изчислени са нормите на възвръщаемост за златото и среброто.
- Установено е наличие на хетероскедастичност и стационарност в данните.
- Приложени са ARCH(1) и GARCH (1,1) модели.
- Изследвани са автокорелационната и частично автокорелационната функции.
- Сравнени са резултатите от ARCH(1) и GARCH (1,1) моделите. От сравнителния анализ може да се направи изводът, че моделът GARCH(1,1) превъзхожда ARCH(1) както при златото, така и при среброто.
- GARCH моделът е по-гъвкав и по-добре улавя динамиката на волатилността в сравнение с ARCH(1).

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

REFERENCES

- [1] World Gold Council. (2024). *Gold: A strategic investment asset*. Retrieved from www.gold.org
- [2] Silver Institute. (2024). *World Silver Survey 2024*. Retrieved from www.silverinstitute.org
- [3] Bank for International Settlements. (2023). *The role of gold in central bank reserves*. BIS Working Paper No. 1145.
- [4] US Geological Survey. (2024). *Mineral commodity summaries 2024*. Retrieved from www.usgs.gov

- [5] Federal Reserve History. (2013). *Nixon Ends Convertibility of U.S. Dollars to Gold and Announces Wage/Price Controls*. Retrieved from: <https://www.federalreservehistory.org/essays/gold-convertibility-ends>
- [6] World Gold Council. (2021). *Gold and the US Dollar: Hedge, Haven and History*. Retrieved from: <https://www.gold.org>
- [7] SilverPrice.org
- [8] <https://datahub.io/core/gold-prices#annual>
- [9] Burch, D. (1982). *The Silver Bears: Hunt Brothers and the Silver Market Manipulation*. *The New York Times*. Retrieved from: <https://www.nytimes.com/1982/04/18/business/the-hunt-brothers-and-silver.html>
- [10] Павлов В., В. Михова, Е. Раева. Статистика със SPSS. Авангард Принт, Русе, 2023.

STEFAN PROBLEM FOR A TWO-SPECIES COMPETITIVE MODEL IN ECOLOGY⁶

Teodor Georgiev, PhD Student

Differential Equations Doctoral Programme

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: t.georgiev@mg-babatonka.bg

Abstract: In this paper we study a two species competitive model with a free boundary. We suppose the spreading of the species tends to a constant speed as time tends to infinity and consider the corresponding travelling wave problem. Using the phase plane analysis, we establish the existence and uniqueness of a travelling wave solution to this free boundary problem.

Key words: two species, competitive model, travelling wave solution, free boundary.

ВЪВЕДЕНИЕ

Разглеждаме следния модел на два конкуриращи се вида

$$\begin{cases} P_t - d_1 \cdot P_{xx} = P(a_1 - b_1 P) & t > 0, & -\infty < x < s(t) \\ Q_t - d_2 \cdot Q_{xx} = Q(a_2 - b_2 Q) & t > 0, & s(t) < x < +\infty \\ P(x, t) = Q(x, t) = 0 \text{ и } s'(t) = -\alpha_1 \cdot P_x - \alpha_2 \cdot Q_x & \text{за } x = s(t) \\ P(0, t) = M_1 \text{ и } Q(0, t) = M_2 & t > 0, & s(0) = s_0 \\ P(x, 0) = P_0(x) \geq 0 & -\infty < x \leq s_0, & Q(x, 0) = Q_0(x) \geq 0 & s_0 \leq x < +\infty \end{cases} \quad (1)$$

В популационната биология тази моделна задача е предложена от Mimura, Yamada & Yotsutani [2] за изучаване разпространението на нашественически видове. Основоположнически труд в тази област е работата на Колмогоров, Петровский и Пискунов [3] от 1937 г. В модела с $P(x, t)$ и $Q(x, t)$ бележим числеността на двата вида съответно в регионите $(-\infty, s(t)]$ и $[s(t), +\infty)$. d_i, a_i, b_i, α_i и M_i ($i = 1, 2$) са дадени положителни константи. Можем да намалим броя на параметрите като преминем към безразмерна система с полагане на $P(x, t)/A = \bar{P}(x, t)$, $Q(x, t)/B = \bar{Q}(x, t)$, $t/\beta = \bar{t}$ и $x/\gamma = \bar{x}$. Като изберем $A = a_1/b_1$, $B = a_2/b_2$, $\beta = 1/a_1$ и $\gamma = \sqrt{d_1/a_1}$ получаваме:

$$\begin{cases} \bar{P}_{\bar{t}} - \bar{P}_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{P}(1 - \bar{P}) & \bar{t} > 0, & -\infty < \bar{x} < \bar{s}(\bar{t}) \\ \bar{Q}_{\bar{t}} - d \cdot \bar{Q}_{\bar{x}\bar{x}} = a \cdot \bar{Q}(1 - \bar{Q}) & \bar{t} > 0, & \bar{s}(\bar{t}) < \bar{x} < +\infty \\ \bar{P} = \bar{Q} = 0 \text{ и } \bar{s}'(\bar{t}) = -\bar{\alpha}_1 \cdot \partial_{\bar{x}} \bar{P} - \bar{\alpha}_2 \cdot \partial_{\bar{x}} \bar{Q} & \text{за } \bar{x} = \bar{s}(\bar{t}) \\ \bar{P}(0, \bar{t}) = \bar{M}_1 \text{ и } \bar{Q}(0, \bar{t}) = \bar{M}_2 & \bar{t} > 0, & \bar{s}(0) = \bar{s}_0 \\ \bar{P}(\bar{x}, 0) = \bar{P}_0(\bar{x}) \geq 0 & -\infty < \bar{x} \leq \bar{s}_0, & \bar{Q}(\bar{x}, 0) = \bar{Q}_0(\bar{x}) \geq 0 & \bar{s}_0 \leq \bar{x} < +\infty \end{cases} \quad (2)$$

където $d = d_2/d_1$ и $a = a_2/a_1$. По-надолу ще изпускаме горната черта за облекчаване на записа.

В тази статия разглеждаме решенията на (2) от тип пътуваща вълна. В работата [1] Du и Lin показват, че в модела за един вид, при неговото разпространение, границата $h(t)$ се придвижва асимптотически с постоянна скорост. Затова ние също предполагаме, че подвижната граница се мести с постоянна скорост, тоест $s(t) = c \cdot t$, $t > 0$. При това в [1] авторите показват, че за дадена константа в граничното условие на Стефан съществува

⁶ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ЗАДАЧА НА СТЕФАН В МОДЕЛ ЗА ДВА КОНКУРИРАЩИ СЕ ВИДА В ЕКОЛОГИЯТА.

единствено c , при което задачата има единствено класическо решение. Този резултат е различен от класическата задача за пътуващи вълни в [3], където скоростта на пътуващата вълна не е уникална, а съществува минимална скорост на вълната. Системата (2) може да се модифицира за модели от тип хищник-плячка, както показва в [4] Lin, така че получаването на подобен резултат както в [1] има широко приложение.

Решенията на (2) от тип пътуваща вълна се получават чрез полагане $P(x, t) = u(z)$ и $Q(x, t) = v(z)$, където $z = x - ct$. Тогава граничната задача в (2) се свежда до

$$\begin{cases} u'' + c.u' + u(1 - u) = 0 & z \in (-\infty, 0) \\ d.v'' + c.v' + av(1 - v) = 0 & z \in (0, +\infty) \\ u(0) = v(0) = 0 & u(-\infty) = 1 \quad v(+\infty) = 1 \\ c = -\alpha_1.u'(0) - \alpha_2.v'(0) \end{cases} \quad (3)$$

Ще покажем, че съществува единствено c^* , за което (3) има единствено класическо решение.

ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ

Система (3) се състои от условието:

$$c = -\alpha_1.u'(0) - \alpha_2.v'(0) \quad (4)$$

и следните две системи диференциални уравнения за $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u' = p, & p' = -cp - u(1 - u), & z \in (-\infty, 0) \\ (u, p)(-\infty) = (1, 0) & u(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} v' = q, & q' = -\frac{1}{d}(cq + av(1 - v)), & z \in (0, +\infty) \\ (v, q)(+\infty) = (1, 0) & v(0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

По метода на стрелбата, фазовите криви на системата (6) могат да се получат от началната задача:

$$(Q_c) \quad \frac{dq}{dv} = -\frac{c}{d} - \frac{av(1 - v)}{dq}, \quad q(v = 1) = 0$$

Нека с $q_c(v)$ бележим нейното решение за $c \in \mathbb{R}$.

Стационарните точки на системата (6) са такива, че $q = 0$ и $cq + av(1 - v) = 0$. Това означава, че (6) има две стационарни точки - $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Лема 1. *Началото $(0, 0)$ е асимптотически устойчиво при $c > 0$ и неустойчиво при $c < 0$. За всяко $c \in \mathbb{R}$ стационарната точка $(1, 0)$ е седлова ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) и собственият вектор w^1 , съответстващ на λ_1 , $w^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, е допирателен до устойчивото многообразие $W^S(1, 0)$ на (6).*

Доказателство. Линеаризираната система, съответстваща на (6), е с матрица

$$Df(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a(1 - 2v)}{d} & -\frac{c}{d} \end{pmatrix}$$

откъдето $Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a/d & -c/d \end{pmatrix}$, $\det Df(0, 0) = a/d > 0$ и $\text{tr} Df(0, 0) = -c/d$.

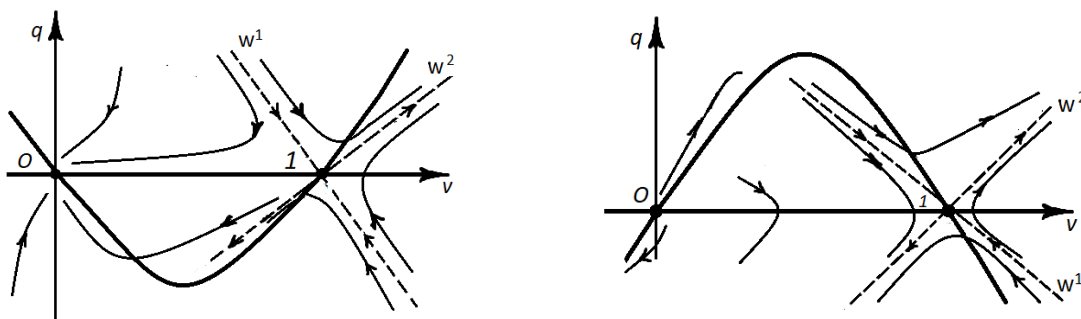
Следователно началото е асимптотически устойчиво при $c > 0$ и неустойчиво при $c < 0$.

Аналогично, от $Df(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a/d & -c/d \end{pmatrix}$, $\det Df(1,0) = -\frac{a}{d} < 0$ следва, че $(1,0)$ е седлова точка за всяко $c \in \mathbb{R}$. Собствените стойности на линеаризираната около $(1,0)$ система намираме от $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a/d & -c/d - \lambda \end{pmatrix} = 0$, така

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4ad}}{2d}$$

Устойчивото многообразие $W^S(1,0)$ е с допирателен вектор $w^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ – собственият вектор, съответстващ на $\lambda_1 < 0$. \square

На Фигура 1 е представена фазовата равнина за система (6), (а) се отнася за $c > 0$, а (b) за $c < 0$. q -нулклината е параболата $\Gamma_c: q = \frac{1}{c}(av^2 - av)$, дефинирана при $c \neq 0$. Със стрелки е указана посоката на векторното поле във всяка от петте области, на които нулклините разделят равнината.



Фигура 1. (а) Двете нулклини при $c > 0$

(b) Двете нулклини при $c < 0$

Лема 2. За всяко $c \in \mathbb{R}$ решението $q_c(v)$ на задача (Q_c) удовлетворява условието $q_c(v) > 0$ в интервала $(0,1)$. При това кривата $q_c(v)$ пресича нулклината Γ_c точно в една точка $v^* \in (0, \frac{1}{2}]$ при $c < 0$. В този случай $\frac{dq_c}{dv} > 0$ при $0 < v < v^*$ и $\frac{dq_c}{dv} < 0$ при $v^* < v < 1$.

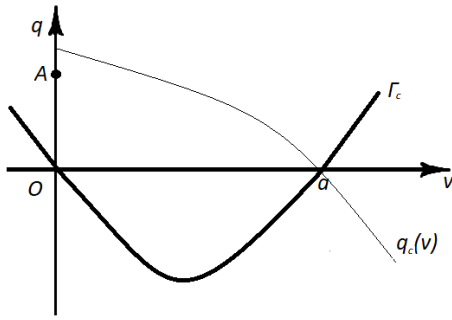
Доказателство. От условието $(v, q)(+\infty) = (1,0)$ на задача (6) следва, че решението $q_c(v)$ лежи върху устойчивото многообразие $W^S(1,0)$.

1 случай $c > 0$. Устойчивото многообразие $W^S(1,0)$ съдържа два клона, дефинирани съответно за $v > 1$ и $v < 1$. Първо разглеждаме клона за $v > 1$. Наклонът на $W^S(1,0)$ е наклона на допирателния вектор $w^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, равен на $\lambda_1 = (-c - \sqrt{c^2 + 4ad})/(2d) < 0$. От това следва, че при $v > 1$ и v близо до 1, кривата $q_c(v)$ лежи под параболата Γ_c и под абсцисата. В тази област имаме $q' > 0, v' < 0$, откъдето

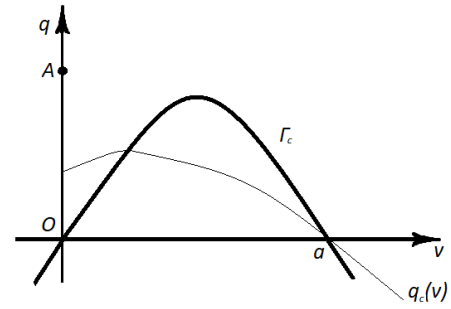
$$\frac{dq_c}{dv} = \frac{\frac{dq_c}{dz}}{\frac{dv}{dz}} = \frac{q'_c}{v'} < 0$$

Следователно $q_c(v)$ е монотонно намаляваща функция в интервала $(1, +\infty)$. Понеже тя не е дефинирана при $v = 0$, условието $v(0) = 0$ на задача (6) не може да се удовлетвори и тя отпада от по-нататъшни разглеждания.

Остава клон на $W^S(1,0)$ за $v < 1$. От представеното по-горе следва, че $q_c(v)$ е разположена над Γ_c и над оста ov . Това означава, че $q' < 0, v' > 0$ и $q_c(v)$ отново е монотонно намаляваща функция, дефинирана поне в интервала $[0,1)$. Следователно $q_c(v) > 0$ за $0 < v < 1$.



Фигура 3. Разположение на $q_c(v)$ и Γ_c при $c > 0$



Фигура 4. $q_c(v)$ и Γ_c при $c < 0$

2 случай $c < 0$. Устойчивото многообразие $W^S(1,0)$ отново съдържа два клона, дефинирани съответно за $v > 1$ и $v < 1$. Първо разглеждаме клона за $v > a$. От горните разглеждания знаем, че наклона на $W^S(1,0)$ е

$$0 > \lambda_1 = \frac{2a}{c - \sqrt{c^2 + 4ad}} > \frac{2a}{c - \sqrt{c^2}} = \frac{2a}{c - (-c)} = \frac{a}{c}$$

От друга страна наклона на $\Gamma_c : q = a(v^2 - v)/c$ в $(1,0)$ е равен на a/c . Така получаваме, че при $v > 1$ и v близо до 1, кривата $q_c(v)$ лежи над параболата Γ_c . За областта под оста Ov и над Γ_c е изпълнено $q' > 0, v' < 0$, следователно $\frac{dq_c}{dv} < 0$ и $q_c(v)$ е монотонно намаляваща. Ще покажем, че $q_c(v)$ не може да пресече Γ_c в никоя точка $v \in (1; +\infty)$. Допускаме противното, тоест $q_c(v)$ пресича Γ_c в някоя точка $\bar{v} > 1$. Това означава, че наклона на $q_c(v)$ е по-малък (по абсолютна стойност по-голям) от наклона на Γ_c в \bar{v} . Но $\frac{dq_c}{dv}(\bar{v}) = 0$, а наклона на Γ_c в \bar{v} е $\frac{1}{c} \cdot (2a\bar{v} - a) < 0$, което противоречи на допускането. Следователно в целия интервал $(1, +\infty)$ $q_c(v)$ намалява и остава над параболата Γ_c , което значи, че $q_c(v)$ не е дефинирана при $v = 0$ и отпада от по-нататъшни разглеждания.

Остава клон на $W^S(1,0)$, дефиниран за $v < 1$. От разглежданията по-горе следва, че $q_c(v)$ е разположена под параболата Γ_c и над оста Ov за $v < 1$ и близки до 1, тоест имаме $q_c(v) > 0$. За тази област имаме, че $q' < 0, v' > 0$, следователно $\frac{dq_c}{dv} < 0$ и $q_c(v)$ е монотонно намаляваща. Ще покажем, че $q_c(v)$ пресича Γ_c за някаква точка $v^* \in (0, 1)$. Допускаме противното, тоест че за всяко $v \in (0, 1)$ $q_c(v)$ е под Γ_c . От това би следвало, че $q_c(v)$ е монотонно намаляваща в $v \in (0, 1)$, тоест, че $q_{\Gamma_c}(0) > q_c(0) > 0$, което противоречи на факта, че $q_{\Gamma_c}(0) = 0$.

Следователно $q_c(v)$ и Γ_c се пресичат в някаква точка $v^* \in (0, 1)$ и за нея имаме, че $q'_c(v^*) = \frac{dq_c}{dv}(v^*) = 0, q'_c(v) < 0$ в $(v^*, 1)$ и $q'_c(v) > 0$ в $(0, v^*)$. Освен това наклона на $q_c(v)$ в v^* е по-малък или равен на наклона на Γ_c в v^* , тоест $0 = q'_c(v^*) \leq (2av^* - a)/c$ следователно $v^* \leq 1/2$. За точките над Γ_c и над оста Ov имаме, че $q' > 0, v' > 0$, следователно $\frac{dq_c}{dv} > 0$ за $v \in (0, v^*)$ и $q_c(v)$ е монотонно растяща, а понеже $q_c(v)$ лежи над Γ_c в $(0, v^*)$ следва, че $q_c(v) > 0$ в целия интервал $(0, 1)$.

3 случай $c = 0$. И в този случай стационарната точка $(1,0)$ на (6) е седлова. Устойчивото многообразие $W^S(1,0)$ отново съдържа два клона, дефинирани съответно за $v > 1$ и $v < 1$.

Както в случая $c > 0$, при клоната $v > 1$ имаме, че $q < 0$ и от системата следва, че $v' < 0, q' > 0$ и $q_c(v)$ е монотонно намаляваща и няма стойност при $v = 0$. Съответно за клоната $v < 1$ имаме, че $q > 0$ и от системата следва, че $v' > 0, q' < 0$ и $q_c(v)$ е отново монотонно намаляваща. От това, че $q_c(1) = 0$ следва, че $q_c(0) > 0$ в интервала $(0, 1)$. \square

Лема 3. При $c = 0$ траекторията $q_c(v) = q_0(v)$ на (6) се записва в явен вид с формулата $q_0(v) = (1 - v) \sqrt{\frac{a(1+2v)}{3d}}$ при $v \in (0,1)$.

Доказателство. При $c = 0$ системата (6) придобива вида

$$\begin{cases} v' = q \\ q' = -\frac{1}{d}av(1-v) \end{cases}$$

Получаваме, че $\frac{dq}{dv} = \frac{a(v^2-v)}{qd}$. След разделяне на променливите и интегриране получаваме решението $\frac{d}{2} \cdot q^2 = a \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v^2}{2} + C \right)$ и от началното условие $q(1) = 0$ намираме $C = \frac{1}{6}$. Така горното решение може да се запише във вида $q = \pm \sqrt{\frac{a}{3d}(2v^3 - 3v^2 + 1)}$ и понеже имаме, че $q_0(v) > 0$ избираме решението

$$q = + \sqrt{\frac{a}{3d}(2v^3 - 3v^2 + 1)} = (1 - v) \sqrt{\frac{a}{3d}(2v + 1)} \text{ за } v \in (0,1).$$

Лема 4. Функцията $q_c(0)$ като функция на параметъра c е растяща за всяко $c \in \mathbb{R}$. Освен това, ако $c < 0$, то $0 \leq q_c(0) < -a/(4c)$.

Доказателство. От Лема 2 имаме, че за всяко $c \in \mathbb{R}$ задача (6) има единствено решение $q_c(v)$, което за $v < a$ изпълнява условието $q_c(v) > 0$ и $q_c(1) = 0$. Сега разглеждаме множеството от решения при $v = 0$, което ще бележим с $q_c(0)$. Нека $c_1 < c_2$. От разглежданията в Лема 2 знаем, че наклонът на $q_c(v)$ в точката $(1,0)$ е $\lambda_1 = (-c - \sqrt{c^2 + 4ad})/(2d)$. От

$$\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4ad}}{2d} > \frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 + 4ad}}{2d}$$

следва, че кривата $q_{c_1}(v)$ се намира под $q_{c_2}(v)$ в близост до точката $(1,0)$ при $v < 1$. Ще покажем, че $q_{c_1}(0) \leq q_{c_2}(0)$. Допускаме противното, т.е. $q_{c_1}(0) > q_{c_2}(0)$. Това означава, че двете криви се пресичат в интервала $(0, a)$. Нека

$$\tilde{v} = \inf\{v \in (0,1) : q_{c_2}(\tilde{v}) \geq q_{c_1}(\tilde{v}) \text{ за } v \leq \tilde{v} < 1\}$$

е такава че $\tilde{v} > 0$. Тогава $q_{c_1}(\tilde{v}) = q_{c_2}(\tilde{v}) = q_{\tilde{v}} > 0$ и $\frac{dq_{c_1}}{dv}(\tilde{v}) \leq \frac{dq_{c_2}}{dv}(\tilde{v})$ понеже за $v > \tilde{v}$ $q_{c_1}(v)$ се намира под $q_{c_2}(v)$. От системата $\frac{dq}{dv} = -\frac{c}{d} - \frac{av(1-v)}{dq}$ следва, че $\frac{dq_{c_1}}{dv}(\tilde{v}) = -\frac{c_1}{d} - \frac{a\tilde{v}(1-\tilde{v})}{dq_{\tilde{v}}} > -\frac{c_2}{d} - \frac{a\tilde{v}(1-\tilde{v})}{dq_{\tilde{v}}} = \frac{dq_{c_2}}{dv}(\tilde{v})$, което е противоречие. Следователно такава $\tilde{v} > 0$ не съществува и така $q_{c_1}(0) \leq q_{c_2}(0)$.

Нека $c < 0$. От Лема 2 знаем, че кривата $q_c(v)$ пресича нулклината Γ_c точно в една точка $v^* \in (0, 1/2]$, която е точка на максимум за $q_c(v)$ в интервала $[0,1]$. Следователно

$$q_c(0) < q_c(v^*) = q_{\Gamma_c}(v^*) \leq \max q_{\Gamma_c}(v) = -\frac{a}{4c}.$$

Това завършва доказателството на Лемата.

В работа [5] Chang & Chen показват, че решението на задача (5) притежава подобни свойства, които обобщаваме в следната лема:

Лема 5 ([5]). Нека $(u, p_c(u))$ е орбита, започваща от $(1,0)$, където $p_c(u)$ удовлетворява началната задача.

$$(P_c) \quad \frac{dp}{du} = -c - \frac{u(1-u)}{p}, \quad p(u=1) = 0.$$

Тогава:

1) $p_c(u) < 0$ за $0 < u < 1$ и $c \in \mathbb{R}$. Освен това, ако $c > 0$, то $(u, p_c(u))$ пресича $\bar{\Gamma}_c: p = \frac{1}{c}(u^2 - u)$ в единствена точка $u^* \in (0, \frac{1}{2}]$, като $\frac{dp_c}{du} < 0$ при $0 < u < u^*$ и $\frac{dp_c}{du} > 0$ при $u^* < u < 1$.

2) При $c = 0$, $p_0(u) = -(1-u)\sqrt{\frac{1+2u}{3}} < 0$ за $0 < u < 1$.

3) $p_c(0)$ е растяща функция на c за $c \in \mathbb{R}$. При това, ако $c > 0$, то $p_c(0) > -\frac{1}{4c}$.

За уравненията в система (3) разглеждаме подходящи гранични условия на $\pm\infty$. Нека с $c_{\min,u}$ означим минималната скорост на профила на пътуваща вълна, който е решение на задачата

$$u'' + c \cdot u' + u(1-u) = 0, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad u(-\infty) = 1, \quad u(+\infty) = 0, \quad (*)$$

а с $c_{\min,v}$ означим минималната по абсолютна стойност скорост на профила на пътуващата вълна, който е решение на задачата

$$d \cdot v'' + c \cdot v' + av(1-v) = 0, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad v(-\infty) = 0, \quad v(+\infty) = 1. \quad (**)$$

Ще използваме работата на Колмогоров, Петровски и Пискунов [3], за да намерим тези стойности. В [3] авторите изучават едномерното уравнение на дифузията

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(v)$$

където $v(x, t)$ е концентрацията на дадена субстанция, а $F(v)$ е непрекъснатата и диференцируема функция, изпълняваща условията:

$$F(0) = F(1) = 0; \quad F(v) > 0 \text{ за } 0 < v < 1 \text{ и } F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(v) < \alpha \text{ за } 0 < v \leq 1.$$

При търсене на решение от тип пътуваща вълна $v(x, t) = v(x + \lambda t)$ се стига до уравнението за профила на вълната

$$\lambda \frac{dv}{dx} = k \frac{d^2v}{dx^2} + F(v), \quad (8)$$

в което λ – скоростта на вълната, е неизвестна. В [3] е доказан следният резултат:

Теорема 1. ([3]) Уравнението (8) има единствено (с точност до трансляция $x' = x + c$) хетероклинично решение $v(x)$, такова че $0 \leq v(x) \leq 1$, $v(-\infty) = 0$, $v(+\infty) = 1$, $v'(\pm\infty) = 0$, за всяко $\lambda \geq \lambda_0$, където $\lambda_0 = 2\sqrt{k\alpha}$.

С полагането $z = -\bar{z}$ задача (*) се преобразува в граничната задача за уравнението (8) с гранични условия, както в Теорема 1, при което $\lambda = c$; $k = 1$; $\alpha = 1 \Rightarrow c_{\min,u} = 2$.

За уравнение (**) от Теорема 1 имаме $\lambda = -c$; $k = d$; $\alpha = a \Rightarrow c_{\min,v} = -2\sqrt{ad}$.

Сега остава само да удовлетворим уравнението (4). За да отбележим зависимостта от c ще запишем $u'(0) = u'_c(0)$ и $v'(0) = v'_c(0)$. От по-горния резултат имаме, че:

$$u'_c(0) \rightarrow 0 \text{ за } c \rightarrow c_{\min,u}^-, \quad u'_c(0) < 0 \text{ за } c < c_{\min,u} \text{ и } u'_c(0) = 0 \text{ за } c > c_{\min,u}$$

$$v'_c(0) \rightarrow 0 \text{ за } c \rightarrow c_{\min,v}^+, \quad v'_c(0) > 0 \text{ за } c > c_{\min,v} \text{ и } v'_c(0) = 0 \text{ за } c < c_{\min,v}$$

Означаваме с $g(c)$ функцията

$$g(c) = -\alpha_1 \cdot u'_c(0) - \alpha_2 \cdot v'_c(0) = -\alpha_1 \cdot p_c(0) - \alpha_2 \cdot q_c(0).$$

Лема 6. За функцията $g(c)$ е изпълнено:

- (1) $g(c)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща функция в интервала $(-\infty, +\infty)$;
 (2) В сила са неравенствата

$$g(c) < \alpha_1/(4c) - \alpha_2 c/d, \quad \text{ако } c > 0 \quad (9)$$

$$g(c) > -\alpha_1 c + \alpha_2 a/(4c), \quad \text{ако } c < 0 \quad (10)$$

- (3) Ако $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 = 0$, то $g(c) > 0$ за $c \in \mathbb{R}$, $g(c) \rightarrow +\infty$ при $c \rightarrow -\infty$ и $g(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$;
 (4) Ако $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 > 0$, то $g(c) < 0$ за $c \in \mathbb{R}$, $g(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow -\infty$ и $g(c) \rightarrow -\infty$ при $c \rightarrow +\infty$;
 (5) Ако $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, то $g(c) \rightarrow +\infty$ при $c \rightarrow -\infty$ и $g(c) \rightarrow -\infty$ при $c \rightarrow +\infty$.

Доказателство. (1) следва от монотонността (Лема 4 и 5) и непрекъснатата зависимост на $p_c(0)$ и $q_c(0)$ по отношение на c .

(2) Нека $c > 0$. От Лема 2 имаме $q_c(v) > 0$ в интервала $(0, 1)$. От началната задача (Q_c) , чието решение е $q_c(v)$, имаме:

$$\frac{dq}{dv} = -\frac{c}{d} - \frac{av(1-v)}{d \cdot q} < -\frac{c}{d}, \quad 0 < v < 1$$

Като интегрираме последното неравенство в интервала $[0, 1]$ и използваме условието $q_c(a) = 0$ получаваме $q_c(0) > \frac{c}{d}$. От това и твърдение 3) на Лема 5 неравенство (9) следва.

Нека $c < 0$. От твърдение 1) на Лема 5 знаем, че решението $p_c(u)$ на началната задача (P_c) : $\frac{dp}{du} = -c - \frac{u(1-u)}{p}$, $p(u=1) = 0$ е отрицателно в интервала $(0,1)$. Следователно имаме $\frac{dp_c}{du} > -c$ за $0 < u < 1$. Така от $p_c(1) = 0$ следва $p_c(0) < c$. Накрая, от последното неравенство и неравенството в Лема 4 получаваме (10).

Твърдения 3), 4) и 5) следват непосредствено от (9) и (10) при $c \rightarrow \pm\infty$.

Остава да докажем основния резултат в тази статия.

Теорема 2. Нека $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, a > 0, d > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$. Тогава съществува единствено c^* , зависещо от α_1, α_2, a и d , за което системата (3) има единствено класическо решение за $c = c^*$. Освен това,

1) ако $\alpha_1 > \alpha_2 \sqrt{a/d}$, то $\min \left\{ 2, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d \cdot \alpha_1}{d + \alpha_2}} \right\} > c^* > 0$;

2) ако $\alpha_1 = \alpha_2 \sqrt{a/d}$, то $c^* = 0$;

3) ако $\alpha_1 < \alpha_2 \sqrt{a/d}$, то $\max \left\{ -2\sqrt{ad}, -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a \cdot \alpha_2}{1 + \alpha_1}} \right\} < c^* < 0$.

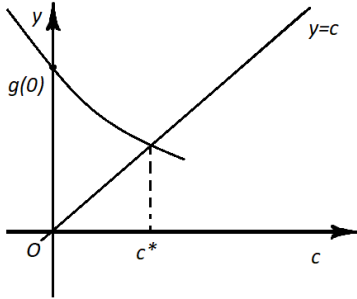
Доказателство. От Лема 6 следва, че уравнението $c - g(c) = 0$ има единствено решение c^* .

За $c = 0$, от Лема 5 имаме $p_0(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, а от Лема 3 $q_0(0) = \sqrt{\frac{a}{3d}}$, следователно

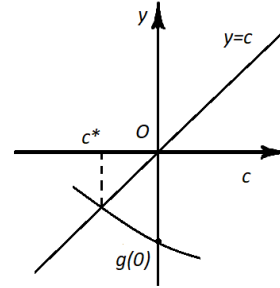
$$g(0) = -\alpha_1 \cdot p_0(0) - \alpha_2 \cdot q_0(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\alpha_1 - \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{a}{d}} \right)$$

Така, ако $\alpha_1 > \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{a}{d}}$ имаме $g(0) > 0$, което означава, че $c^* > 0$ (Фигура 5).

Ако $\alpha_1 = \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{a}{d}}$ имаме $g(0) = 0$ и съответно $c^* = 0$ и накрая, ако $\alpha_1 < \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{a}{d}}$ имаме $g(0) < 0$ и съответно $c^* < 0$ (Фигура 6).



Фигура 5. Разположение на $g(c)$ и c^* при $\alpha_1 > \alpha_2 \sqrt{\frac{a}{d}}$



Фигура 6. Разположение на $g(c)$ и c^* при $\alpha_1 < \alpha_2 \sqrt{\frac{a}{d}}$

Използвайки неравенствата (9) и (10) от Лема 6 можем да отбележим, че:

$$1) \text{ Ако } \alpha_1 > \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{a}{d}}, \text{ то } 0 < c^* = g(c^*) < \alpha_1 \cdot \frac{1}{4c^*} - \alpha_2 \cdot \frac{c^*}{d} \Leftrightarrow 0 < c^* < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{d \cdot \alpha_1}{d + \alpha_2}}.$$

От друга страна, за $c \geq c_{\min,u}$ имаме $p_c(0) = 0$. Следователно $c - g(c) = c + \alpha_2 \cdot q_c(0) > 0$, което означава, че $c^* < c_{\min,u} = 2$. Окончателно $0 < c^* < \min\left\{2, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d \cdot \alpha_1}{d + \alpha_2}}\right\}$.

$$2) \text{ Ако } \alpha_1 < \alpha_2 \cdot \sqrt{\frac{a}{d}}, \text{ то } 0 > c^* = g(c^*) > -\alpha_1 \cdot c^* + \alpha_2 \cdot \frac{a}{4c^*} \Leftrightarrow 0 > c^* > -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot \alpha_2}{1 + \alpha_1}}.$$

От друга страна, за $c \leq c_{\min,v}$ имаме $q_c(0) = 0$. Следователно $c - g(c) = c + \alpha_1 \cdot p_c(0) < 0$.

Това означава, че $c^* > c_{\min,v} = -2\sqrt{ad}$ (понеже $c^* - g(c^*) = 0$) или получаваме

$c^* > \max\left\{-2\sqrt{ad}, -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a \cdot \alpha_2}{1 + \alpha_1}}\right\}$, с което приключва доказателството на Теоремата. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установен е резултат за съществуване и единственост на пътуваща вълна за задачата на Стефан (1) при предположение, че свободната граница се мести с постоянна скорост. Намерени са оценки за скоростта на вълната.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2025 – ФПНО – 03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

REFERENCES

- [1] Y. Du, Z. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 42 (2010), 377—405. Correction in: <http://turing.une.edu.au/~ydu/papers/DuLin-siam-10-correction.pdf>.
- [2] M. Mimura, Y. Yamada, S. Yotsutani, A free boundary problem in ecology, Japan J. Appl. Math. 2 (1085), 151-186.
- [3] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky and N. S. Piskunov, Etude de l'equations de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, Bull. Univ. Moscou S'er. Internat. A1 (1937), 1-6. English transl. in Dynamics of Curved Fronts, P. Pelc'e (ed.), Academic Press, 1988, 105-130.

[4] Z. Lin, A free boundary problem for a predator-prey model, *Nonlinearity*, 20 (2007), 1883-1892.

[5] C. Chang, C. Chen, Travelling wave solutions of a free boundary problem for a two-species competitive model, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12, 2 (2013), 1065-1074.

FRI-2.203-SSS-FM-07

OPTIMIZATION OF SPECIFIC TRANSPORT AND LOGISTICS PROCESSES USING A FLEXIBLE MATHEMATICAL MODEL FOR COST MINIMIZATION⁷

Betina Gabrovska – Financial Mathematics Student

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: betinanikolaeva858@gmail.com

Assoc. Prof. Ivan Georgiev, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: 082-888-424
E-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Dimitar Grozev, PhD

Department of Transport,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: 082-888-231
E-mail: dgrozev@uni-ruse.bg

***Abstract:** Transportation and logistics challenges are critical in supply chain management, with their efficient optimization directly impacting economic sustainability and business competitiveness. This study develops an innovative mathematical model to minimize costs in organizing multi-component transport operations, integrating constraints such as vehicle capacities, staff qualifications, and destination service requirements. The model offers flexibility for real-world scenarios involving dynamic changes in demand and resources, making it valuable for urban logistics, cross-platform delivery management, and other sectors. It transforms the problem into an integer optimization task using binary variables for resource allocation while ensuring compliance with operational and regulatory conditions. Due to the high combinatorial complexity, the solution combines exact and heuristic optimization methods to find suboptimal solutions within acceptable computational time. Results demonstrate effective task distribution, reducing costs by balancing heterogeneous vehicles, skilled drivers, and diverse geographic destinations. The scientific contribution lies in integrating multidimensional constraints into a compact optimization framework and demonstrating practical applicability through simulations and quantitative analysis. The main contributions of the study can be summarized as follows: Development of an optimization model, formulation of an integer optimization problem, application of hybrid methods, and practical applicability. The model was developed using the “Matlab” software product.*

***Key words:** Transportation logistics, integer optimization, resource allocation, heuristic methods, operational efficiency, Matlab.*

ВЪВЕДЕНИЕ

В съвременната транспортна и логистична индустрия оптимизацията на разходите играе ключова роля за повишаване на ефективността и устойчивостта на веригите за доставки [1]. Нарастващата комплексност на транспортните операции, обусловена от динамичните промени в търсенето, ограниченията на ресурсите и географското разпределение на дестинациите, изисква разработването на математически модели за оптимално разпределение на наличните ресурси [2]. В този контекст ефективното управление на превозни средства, водачи и транспортни маршрути е критично за минимизиране на оперативните разходи и осигуряване на навременни доставки.

⁷ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ОПТИМИЗАЦИЯ НА СПЕЦИФИЧНИ ТРАНСПОРТНО-ЛОГИСТИЧНИ ПРОЦЕСИ ЧРЕЗ ГЪВКАВ МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ ЗА МИНИМИЗИРАНЕ НА РАЗХОДИТЕ.

Настоящото изследване разглежда оптимизационен проблем, свързан с организирането на транспортната дейност при наличието на множество ограничения. Разполагаме с фиксиран брой водачи, превозни средства и дестинации, като всеки товар трябва да бъде доставен, съобразявайки се с капацитета на превозните средства и квалификацията на водачите. Разходите по транспортиране са представени чрез матрица, която отчита разхода на всяко превозно средство до всяка дестинация, а допълнителните ограничения налагат, че не всеки водач може да управлява всяко превозно средство или да обслужва всяка дестинация. Основната цел на задачата е съставянето на валиден план за разпределение, който минимизира общите транспортни разходи, като определя кой водач ще управлява кое превозно средство по дадена дестинация.

Проблемът се формулира като целочислена оптимизационна задача [3, 4], в която решенията са представени чрез трикомпонентен бинарен масив. Поради комбинаторната му сложност, намирането на глобално оптимално решение изисква използването на комбинация от точни и евристични методи, които позволяват откриване на близкооптимални решения в разумно изчислително време.

Изследването предоставя иновативен модел, който съчетава различни ограничения в единна оптимизационна рамка, като се фокусира върху практическата приложимост на метода. Представената оптимизационна стратегия е приложима в различни логистични сценарии, включително градски транспорт, дистрибуция на стоки и управление на доставки между различни платформи. В допълнение, чрез симулации и количествени анализи, резултатите потвърждават ефективността на предложеното решение по отношение на намаляване на разходите и подобряване на разпределението на ресурсите.

ИЗЛОЖЕНИЕ

В транспортно-логистичните системи оптимизацията на разходите е от съществено значение за ефективното функциониране на веригата на доставки. В този контекст настоящото изследване разглежда комбинаторен проблем на оптимално разпределение на ресурси – водачи, превозни средства и маршрути – при наличие на разнообразни ограничения. Целта на оптимизационния модел е минимизиране на общите транспортни разходи, като същевременно се осигурява, че:

- всеки товар е доставен до предвидената дестинация;
- водачите управляват само подходящи превозни средства и обслужват позволени за тях маршрути;
- капацитетът на превозните средства е ефективно използван.

Този проблем е представен чрез целочислен нелинеен оптимизационен модел [5, 6], който се решава чрез точни или приближени методи поради високата му комбинаторна сложност.

За формулиране на задачата се въвеждат следните известни параметри:

- m – брой на водачите;
- n – брой на превозните средства;
- p – брой на дестинациите.

Следните матрици и вектори задават конкретните характеристики на транспортната система:

Матрица на транспортните разходи C : c_{jk} обозначава разхода за транспортиране на товар с превозно средство j към дестинация k .

Матрица на допустимите дестинации D : d_{ik} приема стойност 1, ако водач i има право да пътува до дестинация k , и 0 – в противен случай.

Матрица на допустимите превозни средства B : b_{ij} е 1, ако водач i има право да управлява превозно средство j , и 0 – иначе.

Вектор на търсенето Q : q_k е количеството товар, което трябва да бъде доставено до $k^{\text{та}}$ дестинация .

Вектор на капацитета на превозните средства R : r_j задава максималния товар, който може да бъде превозен от превозно средство j .

За решаване на задачата се използва бинарна променлива x_{ijk} :

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{– когато } i\text{-тият водач, управлява } j\text{-то превозно средство, към } k\text{-та дестинация,} \\ 0 & \text{– в противен случай} \end{cases}$$

В задачата за оптимизация, която разглеждаме, имаме набор от ограничения, които гарантират, че решенията са реалистични и отговарят на определени изисквания. Тези ограничения са формулирани математически и отразяват реални условия, свързани с назначаването на водачи, използването на превозни средства и доставките към дестинации. Разглежда се всяко от тези ограничения по-подробно, за да разбере какво точно представлява и какво условие от реалния свят то моделира.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p x_{ijk} \leq 1, \forall i = \overline{1, m} \quad (1)$$

Ограничение(1) отразява факта, че един водач може да бъде назначен за най-много един курс на едно превозно средство. Ограничението ≤ 1 гарантира, че водачът i може да бъде назначен за най-много една комбинация от превозно средство и дестинация.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_j x_{ijk} \geq q_k, \forall k = \overline{1, p} \quad (2)$$

Ограничение (2) предава факта, че сумарния товарен капацитет на всички превозни средства към $k^{\text{та}}$ дестинация, е поне толкова, колкото е необходимото количество товар q_k за тази дестинация.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p x_{ijk} \leq 1, \forall j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Ограничение (3) кореспондира с факта, че едно превозно средство, не може да се ползва едновременно за повече от една дестинация.

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq d_{ik}, \forall i = \overline{1, m}, \forall k = \overline{1, p} \quad (4)$$

Ограничение (4) отразява факта, че i -тият водач може да бъде изпратен към $k^{\text{та}}$ дестинация, ако не е нарушил закони, като част от тях могат да бъдат:

- **Наказателни митнически нарушения;**
- **Забрана за влизане в дадена стана;**
- **Не притежава паспорт за страните извън Европа;**
- **Не желае да подещава дадена дестинация.**

$$\sum_{k=1}^p x_{ijk} \leq b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n} \quad (5)$$

Ограничение (5) представя факта, че i -тия водач може да управлява j -то превозно средство единствено ако притежава необходимата правоспособност за него. Условието $\leq b_{ij}$ гарантира, че водачът няма да бъде изпратен с превозно средство, за което не притежава необходимата категория.

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}, \forall k = \overline{1,p} \quad (6)$$

Ограничение(6) е изискване променливите x_{ijk} да бъдат бинарни, тоест могат да приемат само стойности 0 или 1.

Основната цел на модела е да намери валиден план, който да минимизира общите транспортни разходи, което се формулира чрез следната целева функция:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{jk} x_{ijk} \quad (7)$$

Окончателния математически модел приема следният вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p C_{jk} x_{ijk}$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p x_{ijk} \leq 1, \forall i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_j x_{ijk} \geq q_k, \forall k = \overline{1,p}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq d_{ik}, \forall i = \overline{1,m}, \forall k = \overline{1,p}$$

$$\sum_{k=1}^p x_{ijk} \leq b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}, \forall k = \overline{1,p}$$

Числен пример:

Транспортна фирма разполага с дванадесет ($m=12$) водача, с десет ($n=10$) превозни средства и пет ($p=5$) дестинации, които се изпълняват регулярно. Въз основа на това задачата се свежда до оптимизиране на превозите, така че да се получи най-висок икономически резултат.

Табл.1. Разходите за транспортни средства към съответните дестинации

| ПС\Дестинация (Матрица C) | 1 (300km) | 2 (600km) | 3 (1000km) | 4 (2000km) | 5 (3000km) |
|------------------------------|--------------|--------------|---------------|----------------|----------------|
| 1(N1) | 0.60*300=180 | 0.6*600=360 | 0.55*1000=550 | 0.5*2000=1000 | 0.45*3000=1350 |
| 2(N1) | 0.60*300=180 | 0.6*600=360 | 0.55*1000=550 | 0.5*2000=1000 | 0.45*3000=1350 |
| 3(N2) | 0.96*300=288 | 0.96*600=576 | 0.91*1000=910 | 0.86*2000=1720 | 0.81*3000=2430 |
| 4(N2) | 0.96*300=288 | 0.96*600=576 | 0.91*1000=910 | 0.86*2000=1720 | 0.81*3000=2430 |

| | | | | | |
|--------|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 5(N2) | 0.96*300=288 | 0.96*600=576 | 0.91*1000=910 | 0.86*2000=1720 | 0.81*3000=2430 |
| 6(N3) | 1.60*300=480 | 1.60*600=960 | 1.55*1000=1550 | 1.50*2000=3000 | 1.45*3000=4350 |
| 7(N3) | 1.60*300=480 | 1.60*600=960 | 1.55*1000=1550 | 1.50*2000=3000 | 1.45*3000=4350 |
| 8(N3) | 1.60*300=480 | 1.60*600=960 | 1.55*1000=1550 | 1.50*2000=3000 | 1.45*3000=4350 |
| 9(N3) | 1.60*300=480 | 1.60*600=960 | 1.55*1000=1550 | 1.50*2000=3000 | 1.45*3000=4350 |
| 10(N3) | 1.60*300=480 | 1.60*600=960 | 1.55*1000=1550 | 1.50*2000=3000 | 1.45*3000=4350 |

Табл.2. Товаримост на превозните средства

| | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ПС | №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 | №7 | №8 | №9 | №10 |
| Максимална товаримост на ПС | 4.5 | 4.5 | 8 | 8 | 8 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |

Табл.3. Количество товар (ton), което трябва да се достави

| | | | | | |
|-------------|----|----|----|----|----|
| Дестинация | №1 | №2 | №3 | №4 | №5 |
| Желан тонаж | 13 | 23 | 17 | 25 | 20 |

Табл.4. Възможност на даден водач да пътува към дадена дестинация (1-може, 0-не може)

| | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|
| Водач\Дестинация | №1 | №2 | №3 | №4 | №5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Табл.5. Правоспособност на даден водач да управлява дадено превозно средство (1-да, 0-не)

| | | | | | | | | | | |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Водач\ПС | №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 | №7 | №8 | №9 | №10 |
| №1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| №2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| №3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| №4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| №5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| №6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| №7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| №8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| №9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| №10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| №11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| №12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

В табл.1 са дадени потенциалните транспортни разходи (в условни единици) към всяка дестинация с определено превозно средство. Табл.2 предоставя информация за товаримостта на всяко превозно средство. Табл. 3 показва количеството товар, което трябва да се транспортира до съответната дестинация. В табл.4 е предоставена информация за възможността, конкретен водач да посети дадена дестинация, а табл.5 показва дали даден водач може да управлява дадено превозно средство.

Табл.6. Разпределение на дестинациите, обслужени от даден водач и превозно средство

| Дестинация № | Водач № | Превозно средство № |
|--------------|---------|---------------------|
| 1 | 11 | 6 |
| 2 | 4 | 2 |
| 2 | 10 | 8 |
| 3 | 7 | 7 |
| 4 | 3 | 4 |
| 4 | 12 | 9 |
| 5 | 9 | 10 |

В табл.6 е предоставен план, при който са обслужени всички дестинации от определени водачи, които управляват дадени превозни средства, така че да покрива всички изисквания и ограничения, за да постигнат минимални транспортни разходи. От решение се вижда, че дестинация №1 трябва да бъде обслужена от водач №11 управляващ превозно средство №6. Дестинация №2 ще се обслужи от двама водачи - №4 и №10, управляващи съответно превозни средства №2 и №8. Следващата дестинация №3 се обслужва превозно средство №7 и водач №7. За дестинация №4 отново са нужни двама водачи с номера: №3 и №12, както и две превозни средства съответно: №4 и №9. Последната дестинация №5 обслужва от превозно средство №10 и водач №9. При този изграден график се получават минимални сумарни транспортни разходи в размер на 12 420 парични единици.

ИЗВОД

Настоящата статия представя математичен модел, който представя решение на клас транспортно-логистични проблеми. Моделът дава оптимално (по транспортни разходи) разпределение на водачите обслужващи дестинации, с конкретни превозни средства като се отчитат всички законови и физически ограничения. Разгледан е пример, при който 12 водача трябва да обслужат 5 дестинации, с помощта на 10 превозни средства, отчитайки специфичните юридически и физически ограничения. Намерен е оптимален по разходи план, при който със 7 водача, управляващи съответните превозни средства са обслужени всичките дестинации с общ разход от 12 420 парични единици.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящото изследване представи математически модел за оптимално разпределение на транспортните ресурси, насочен към минимизиране на разходите в логистичните операции. Разгледаната оптимизационна задача включва множество ограничения, свързани с товарносимостта на превозните средства, квалификацията на водачите и изискванията за обслужване на дестинациите. Формулираният модел използва бинарни променливи за определяне на връзките между водачите, превозните средства и маршрутите, което води до сложна комбинаторна структура на решението.

Решаването на този тип задачи представлява значително предизвикателство поради експоненциално растящото множество възможни решения. В този контекст приложението на хибридни методи, съчетаващи точни (линейно и целочислено програмиране) и евристични алгоритми (генетични алгоритми, рояк от частици и др.)[7], е ключово за намирането на ефективни решения в разумно време. Симулационните експерименти [8], базирани на предложената оптимизационна рамка, демонстрират, че този модел води до намаляване на транспортните разходи, подобрява използването на ресурсите и осигурява надеждно разпределение на задачите. Основните приноси на изследването могат да бъдат обобщени, както следва:

1. Разработване на оптимизационен модел, който интегрира реални ограничения в транспортно-логистичните процеси.

2. Формулиране на целочислена задача за оптимизация, която обхваща правоспособността на водачите, капацитета на превозните средства и задължителното покриване на транспортните нужди за всяка дестинация.

3. Приложение на хибридни методи, които позволяват ефективно търсене на блискооптимални решения в сложни комбинаторни среди.

4. Практическа приложимост, като моделът може да се адаптира към различни индустриални сценарии – градска логистика, международен транспорт и дистрибуционни мрежи.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

REFERENCES

- [1] Christopher, M. (2023). *Logistics & Supply Chain Management* (6th ed.). Pearson.
- [2] Behnke, M., & Kirschstein, T. (2022). Optimization of logistics resources under uncertainty. *European Journal of Operational Research*.
- [3] Furini, F., & Ljubić, I. (2021). *Integer optimization in logistics*. Omega.
- [4] Wolsey, L. A., & Nemhauser, G. L. (2022). *Integer and combinatorial optimization*. John Wiley & Sons.
- [5] Toth, P., & Vigo, D. (2023). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications* (3rd ed.). SIAM.
- [6] Ghiani, G., et al. (2022). *Introduction to Logistics Systems Management* (3rd ed.). Wiley.
- [7] Eiben, A.E., & Smith, J.E. (2023). *Introduction to Evolutionary Computing* (3rd ed.). Springer.
- [8] Law, A.M., & Kelton, W.D. (2023). *Simulation Modeling and Analysis* (6th ed.). McGraw-Hill Education.

APPLICATION OF ARIMA AND CAPM MODELS IN ULTA BEAUTY STOCK VALUATION⁸

Gabriela Nedelcheva

Financial Mathematics Student,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: gabrielamilenova11@gmail.com

Chief Assist. Prof. Elitsa Raeva, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: eraeva@uni-ruse.bg

***Abstract:** Investing is an important tool for building long-term financial security and achieving sustainable growth in personal finances. It provides opportunities for capital growth, but also involves a certain level of risk. Price movements of financial assets are determined by a number of external factors, including economic cycles, market dynamics and global events. This paper discusses the application of two widely used models, ARIMA and CAPM (Capital Asset Pricing Model), to the valuation and analysis of Ulta Beauty shares. They are applied on weekly data for different periods. Using SPSS and Microsoft Excel software, the future asset values are predicted. The objective is to make a comparative analysis of ARIMA and CAPM.*

***Key words:** Stock price, ARIMA, CAPM, time series, BIC criterion, error analysis, forecasting.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Акциите са дялове от собствеността в една компания. Притежателите на акции (акционерите) имат право на част от печалбата и могат да спекулират с цената на акциите на фондовия пазар. В съвременната финансова теория и практика, ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Averages) моделът и МОКА (Модел за оценка на капиталовите активи) играят важна роля в анализа и оценката на акциите. Всеки от тези модели предлага уникален подход за прогнозиране на доходността и оценка на риска, което е от съществено значение за инвеститорите.

Скоростни проучвания изследват комбинирането на ARIMA с МОКА за подобряване на финансовото прогнозиране. Този смесен подход позволява улавяне както на зависещи от времето модели в цените на акциите чрез ARIMA, така и на оценка на връзките риск-възвръщаемост чрез МОКА. Чрез интегрирането на тези модели анализаторите могат да получат по-цялостно разбиране на динамиката на ценообразуването на активите и да подобрят своята точност на прогнозиране. Сравняването на модели за оценка на дивиденди и модели за ценообразуването на капитала на активите може да помогне на инвеститорите да оценят стойността на активите и да оптимизират разпределението на инвестиционния портфейл при взимането на инвестиционни решения [1].

В настоящата работа са приложени двата метода за пресмятане на прогнозните стойности на цените на акциите на Ulta Beauty. Пресметнати са различни форми на грешките от прогнозите чрез методите MAD, MSE, MAPE и MPE. Целта на анализа е да се направи сравнение между реализацията на двата подхода.

⁸ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: ПРИЛОЖЕНИЕ НА ARIMA И МОКА МОДЕЛИ В ОЦЕНКА НА АКЦИИТЕ НА ULTA BEAUTY.

Използвани са данни от информационната платформа Investing за различни периоди на седмична база [2]. За пресмятане на Модела за оценка на капиталовите активи цените са приведени към норма на възвръщаемост по следната формула:

$$r_i = \frac{X_{i+1} - X_i}{X_i}, \quad i = 1, 2 \dots n$$

където $n = 51$ е броят на наблюденията (цените). Разгледани са различни времеви периоди, както е показано в таблица 1.

Таблица 1. Седмични данни

| Данни на активите | | | | | | |
|--|------------------------|--|------------------------|-----|--|------------------------|
| За 1 година $P_1 - 51$ набл. (01.01.2023г.-01.01.2024г.) | | За 2 година $P_2 - 51$ набл. (01.01.2022г.-01.01.2023г.) | | ... | За 10 година $P_{10} - 51$ набл. (01.01.2014г.-01.01.2015г.) | |
| Цени | Норма на възвръщаемост | Цени | Норма на възвръщаемост | ... | Цени | Норма на възвръщаемост |
| X_1 | — | X_1 | — | | X_1 | — |
| X_2 | r_1 | X_2 | r_1 | ... | X_2 | r_1 |
| X_3 | r_3 | X_3 | r_3 | | X_3 | r_3 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| X_{51} | r_{50} | X_{51} | r_{50} | | X_{51} | r_{50} |

За оценка на МОКА моделите е разгледан по-кратък период заради динамичните промени в безрисковия процент, докато при ARIMA моделите е взет по-дълъг период, който позволява по-добра оценка на грешките [3]. В настоящата работа са използвани два софтуерни продукта – SPSS и Microsoft Excel.

МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА КАПИТАЛОВИТЕ АКТИВИ

Моделът за оценка на капиталовите активи е финансов модел, който описва връзката между риска и очакваната възвръщаемост на даден актив. Използва се широко в областта на финансите за ценообразуване на рисковите ценни книжа и за генериране на очакваната възвръщаемост на активите, като се има предвид рискът на тези активи и цената на капитала.

Очакваната норма на възвръщаемост се пресмята чрез следната формула:

$$E(R_i) = R_f + (E(R_m) - R_f)\beta_i \tag{1}$$

където,

- $E(R_i)$ – очакваната норма на възвръщаемост на i -тия актив;
- R_f – нормата на възвръщаемост на безрисковия актив;
- $E(R_m)$ – очакваната норма на възвръщаемост на пазара (индекс S&P 500);
- β_i – показател за системен риск;
- $(E(R_m) - R_f)$ – пазарна рискова премия.

БЕТА КОЕФИЦИЕНТ КАТО ИЗМЕРИТЕЛ НА ВОЛАТИЛНОСТТА

Числителят на коефициента β се явява измерител на систематичния (пазарния) риск на акцията. Следователно коефициентът β е отношението между систематичния риск на акциите и риска на пазарния портфейл.

За да се пресметне бета коефициентът, се използва формулата:

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{var(R_m)} \quad (2)$$

• Ако β коефициентът е по-голям от 1, това означава, че даденият актив е изключително рисков, поради наличието на висока волатилност. Той внася по-голям риск, отколкото общият риск на пазарният портфейл.

• Когато $\beta = 1$, възвращаемостта на актива и пазарния портфейл се движат в една и съща посока с еднаква сила, а ако $0 < \beta < 1$, тогава те отново се движат в една посока, но възвращаемостта на актива се движи с по-малка сила.

• При $\beta = 0$ не се наблюдава зависимост между възвращаемостите, което означава, че даденият актив е безрисков [4].

Ковариацията се пресмята по формулата:

$$cov(R_i, R_m) = [(R_i - E(R_i))(R_m - E(R_m))]$$

Нормите на възвръщаемост на безрисковия актив (R_f) за всяка година са представени в таблица 2. За стойностите на безрисковия актив е използвана информация за държавни облигации на САЩ (US Treasury Bond) към 31.12.2024г. [5]

Таблица 2. Стойности на R_f за съответната година

| | Години | R_f | | Години | R_f |
|----------------------|-----------|-------|-----------------------|-----------|-------|
| 1 Year Treasury Rate | 2023-2024 | 4,16% | 6 Year Treasury Rate | 2018-2024 | 4,41% |
| 2 Year Treasury Rate | 2022-2024 | 4,24% | 7 Year Treasury Rate | 2017-2024 | 4,48% |
| 3 Year Treasury Rate | 2021-2024 | 4,27% | 8 Year Treasury Rate | 2016-2024 | 4,51% |
| 4 Year Treasury Rate | 2020-2024 | 4,32% | 9 Year Treasury Rate | 2015-2024 | 4,55% |
| 5 Year Treasury Rate | 2019-2024 | 4,38% | 10 Year Treasury Rate | 2014-2024 | 4,58% |

За пресмятането на бета коефициента е използвана формула (2). След прилагане на формула (1) се получава число, което ни дава прогнозна норма на възвращаемост за следващата година. За да може да намерим грешки от прогнозите и да ги сравним с времеви редове, са необходими прогнози за цените.

В таблица 3 са представени получените резултати от МОКА модела. В третата колона са представени усреднени стойностите от изминалите години. Числото 0.0095 е средно аритметично от резултатите от МОКА за изминалите 10 години, т.е. всички стойности от последната колона. Числото $0.0058 = \frac{0.0201+0.0045-0.0073}{3}$. В четвъртата колона са пресметнати средните стойности от реалните норми на възвръщаемост $r_i, i = 1, \dots, n$ на акцията Ulta Beauty за съответните години.

Таблица 3. CAPM резултати

| Години | Период | Средноаритметично МОКА резултати | Average returns ULTA BEAUTY | МОКА резултати |
|--------|---------------|----------------------------------|-----------------------------|----------------|
| 10 | 2014г.-2015г. | 0,0095 | 0,0072 | 0,0433 |
| 9 | 2015г.-2016г. | 0,0057 | 0,0076 | 0,0114 |
| 8 | 2016г.-2017г. | 0,0050 | -0,0013 | -0,0130 |
| 7 | 2017г.-2018г. | 0,0076 | 0,0027 | 0,0177 |
| 6 | 2018г.-2019г. | 0,0059 | -0,0010 | 0,0100 |
| 5 | 2019г.-2020г. | 0,0051 | 0,0062 | 0,0381 |
| 4 | 2020г.-2021г. | -0,0032 | 0,0075 | -0,0300 |
| 3 | 2021г.-2022г. | 0,0058 | 0,0046 | -0,0073 |

| | | | | |
|---|---------------|--------|--------|--------|
| 2 | 2022г.-2023г. | 0,0123 | 0,0002 | 0,0045 |
| 1 | 2023г.-2024г. | 0,0201 | - | 0,0201 |

МОДЕЛЪТ ARIMA

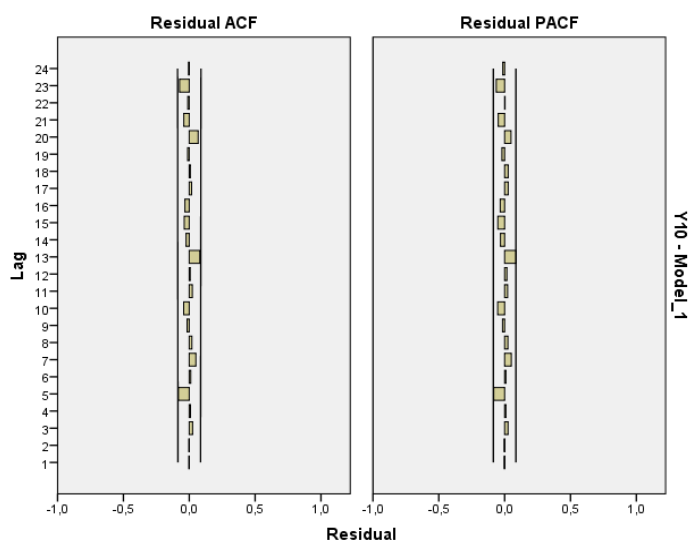
ARIMA моделите са мощни статистически инструменти за анализ и прогнозиране на времеви редове. Те са подходящи за данни, които показват времева зависимост (например тенденции или сезонност), и изискват преобразуване на нестационарни данни в стационарни, за да се улови тяхната структура.

Моделът се състои от три параметъра: авторегресия (AR), интегриране (I) и пълзяща средна стойност (MA). Авторегресията описва зависимостта между текущото наблюдение и предишните наблюдения в редицата. Интегрирането се използва за превръщане на нестационарния времеви ред в стационарен. Пълзящо средно е тип времева редица, която използва множество предишни наблюдения, за да предскаже следващата стойност [6].

След разглеждането на различни стойности p d q ARIMA е избран най-добрият модел ARIMA (3, 1, 1) с логаритмувани данни.

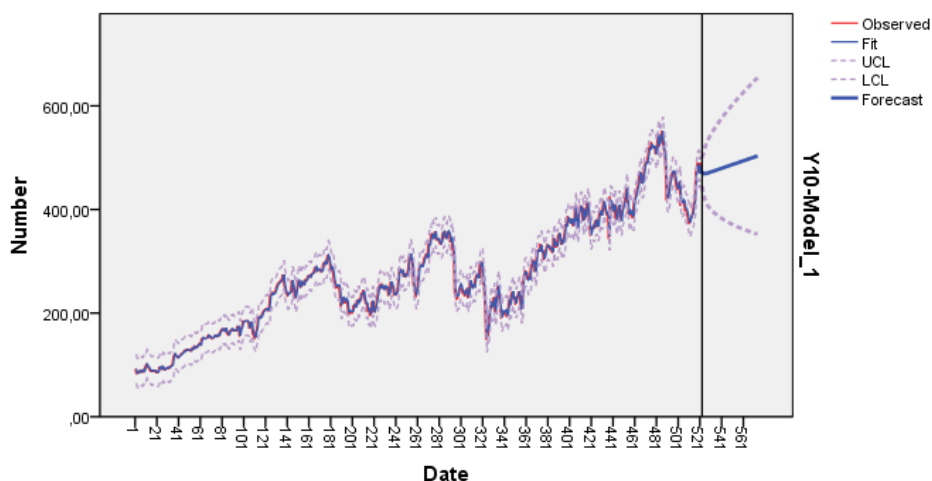
За избор на оптимален ARIMA модел се взема предвид Бейсовия информационен критерий BIC (Bayesian Information Criterion). Избира се моделът с минимална стойност 5,347.

Друг критерий, че избраният модел е подходящ е липсата на излизания от доверителните интервали на ACF и Partial ACF (Фигура 1).



Фигура 1. ACF и PACF на остатъците

На фигура 2 е представена графика на историческите данни и направената прогноза за 1 година (01.01.2024г.-01.01.2025г.).



Фигура 2. Графика на данните и направената прогноза

От фигура 2 се вижда, че има силно изразен тренд. Това показва, че компонентата d няма да бъде 0.

Избраните ARIMA модели за всички периоди са представени в таблица 4.

Таблица 4. Избрани ARIMA модели

| Години | Период | ARIMA модели | BIC критерий |
|--------|---------------------------|--------------|--------------|
| 10 | 01.01.2014г.-01.01.2024г. | (3,1,1) | 5,347 |
| 9 | 01.01.2015г.-01.01.2024г. | (3,1,1) | 5,451 |
| 8 | 01.01.2016г.-01.01.2024г. | (3,1,1) | 5,564 |
| 7 | 01.01.2017г.-01.01.2024г. | (1,1,3) | 5,661 |
| 6 | 01.01.2018г.-01.01.2024г. | (1,1,1) | 5,756 |
| 5 | 01.01.2019г.-01.01.2024г. | (1,1,1) | 5,844 |
| 4 | 01.01.2020г.-01.01.2024г. | (2,1,1) | 5,947 |
| 3 | 01.01.2021г.-01.01.2024г. | (2,1,2) | 5,898 |
| 2 | 01.01.2022г.-01.01.2024г. | (0,1,5) | 6,133 |
| 1 | 01.01.2023г.-01.01.2024г. | (0,1,0) | 5,983 |

За валидиране на резултатите от прогнозата, са разгледани реалните стойности на активите за периода 01.01.2024г.-01.01.2025г.[2], които използваме за пресмятане на действителните норми на възвръщаемост (Real Returns). Отново са представени чрез средно аритметично за всеки период.

В таблица 5 са представени резултатите от ARIMA моделите.

Таблица 5. ARIMA резултати

| Години | Период | Средноаритметично ARIMA резултати | Average returns ULTA BEAUTY | ARIMA резултати Return |
|--------|---------------|-----------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 10 | 2014г.-2024г. | 0,001258 | -0,00078 | 0,00125 |
| 9 | 2015г.-2024г. | 0,001259 | -0,00078 | 0,00123 |
| 8 | 2016г.-2024г. | 0,001263 | -0,00078 | 0,00119 |
| 7 | 2017г.-2024г. | 0,001274 | -0,00078 | 0,00071 |
| 6 | 2018г.-2024г. | 0,001368 | -0,00078 | 0,00147 |
| 5 | 2019г.-2024г. | 0,001348 | -0,00078 | 0,00140 |
| 4 | 2020г.-2024г. | 0,001335 | -0,00078 | 0,00193 |
| 3 | 2021г.-2024г. | 0,001138 | -0,00078 | 0,00254 |
| 2 | 2022г.-2024г. | 0,000435 | -0,00078 | 0,00149 |
| 1 | 2023г.-2024г. | -0,000625 | -0,00078 | -0,00063 |

Последната стъпка е пресмятане сумата от грешките от прогнозата оценка посредством методите: MAD, MSE, MAPE и MPE.

В метода MAD (Mean Absolute Derivation) се използва сумиране на абсолютните грешки. Средното абсолютно отклонение измерва точността на прогнозата, осреднявайки абсолютните стойности на грешките. Използването на MAD е най- полезно в случаите, когато е необходимо грешката от прогнозата да се измерва в същите мерни единици, както и изходния ред. MAD се пресмята посредством формулата

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |X_t - \hat{X}_t| \quad (3)$$

Където X_t е стойността на времевия ред в момента t , \hat{X}_t е прогнозата за стойност X_t . Средноквадратичната грешка (Mean Squared Error, MSE) представлява друг метод за оценка на метода за прогнозиране. Всяка една грешка се повдига на квадрат, след това тези величини се сумират и се делят на броя наблюдения. Тъй като всяка стойност на отклонението се повдига на квадрат, този метод подчертава големите грешки при прогнозирането. Тази особеност е много важна, тъй като метод за прогнозиране, даващ средни по големина грешки, в някои случаи може да е за предпочитане пред метод, който обикновено дава малки грешки, но от време на време може да причини много големи. Грешката се изчислява посредством уравнението

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \hat{X}_t)^2 \quad (4)$$

Средната абсолютна грешка в проценти (Mean Absolute Percentage Error, MAPE) се изчислява посредством намиране на абсолютната грешка във всеки момент от време и деленето на съответното наблюдение, след което средните абсолютни процентни грешки се сумират и осредняват. Този подход е полезен в случаите, когато стойността на прогнозируемата величина е важна в оценката на точността на прогнозата. MAPE подчертава колко са големи грешките от прогнозирането в сравнение с истинските стойности на реда. Също така MAPE може да се използва за сравнение на един или повече методи за прогнозиране, приложени към различни времеви редове. MAPE се изчислява като

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|X_t - \hat{X}_t|}{X_t} \quad (5)$$

Често се необходимо да се определи дали методът за прогнозиране е изместен (получената прогноза е постоянно занижена или завишена). В този случай се използва средната процентна грешка (Mean Percentage Error, MPE). Тя се изчислява посредством намиране на грешката във всеки момент от време и деленето на стойността и на истинската стойност в този момент като след това получените процентни грешки се осредняват. Ако методът на прогнозиране е неизместен, MPE ще указва процентна стойност, близко до нулата. Ако в резултат се получи голяма отрицателна процентна стойност, то методът на прогнозиране се приема, че е последователно преоценяващ. Ако стойността е положителна, методът е последователно недооценяващ.

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \hat{X}_t)}{X_t} \quad (6)$$

Таблица 6. Резултати от MAD, MSE, MAPE, MPE

| | ARIMA average results | Прогноза | CAPM average results | Прогноза |
|------|-----------------------|----------|----------------------|----------|
| MAD | 0,00043 | 0,00225 | 0,01694 | 0,01813 |
| MSE | 0,00000042 | 0,00001 | 0,00041 | 0,00049 |
| MAPE | 0,5293 | -2,8764 | 1,2471 | 2,4446 |
| MPE | -0,4104 | 2,8764 | -1,6688 | -2,7636 |

Резултатите в таблица 6 се получават след прилагане на формулите (3), (4), (5) и (6) се получават следните резултати съответно за МОКА и ARIMA моделите.

ИЗВОДИ

В резултат на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

- Стойността на MAD показва, че всяка прогноза се отклонява от истинската стойност средно с 0,00043 щатски долара (USD).
- Грешките MSE (0,00000042) и MAPE (52,93%) могат да се използват за сравнение с друг прогнозиращ метод, приложен към същите данни. Следователно може да сравним ARIMA с CAPM. Тази голяма стойност на MAPE (52,93%) при ARIMA модела вероятно се дължи на COVID-19 периода.
- Голямата отрицателната стойност на MPE (-41,01%) свидетелства, че даденият метод на прогнозиране е последователно преоценяващ.
- Анализът, който е направен, може да се използва за определяне на необходимия период за изчисляване на прогнозата.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

ИЗТОЧНИЦИ

- [1] Qianye, H. (2024), Comparison of CAPM and DVM: Evidence from Costco and Walm, *Advances in Economics Management and Political Sciences*
- [2] <https://www.investing.com/equities/ulta-salon-cosmetics---fragrance>
- [3] <https://quant.stackexchange.com/questions/63822/time-horizon-of-estimation-period-capm-beta>
- [4] Ivanova, Y. and E. Raeva (2023), An application of the ARIMA model in capital asset pricing model for forecasting of the stocks of index Standard & Poor's 500
- [5] https://ycharts.com/indicators/3_year_treasury_rate
- [6] Centeno, V., I.R. Georgiev, V. Mihova and V. Pavlov (2019), *Price Forecasting and Risk Portfolio Optimization*, AIP Publishing

THE LOGISTIC EQUATION IN POPULATION ECOLOGY AND EPIDEMIOLOGY⁹

Yoana Delimarkova – Student

Financial Mathematics Student
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: joana.delimarkova@gmail.com

Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD

Department of Mathematics
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

***Abstract:** In this paper we review the fundamental mathematical models in population biology and epidemiology, with particular emphasis placed on the exponential and logistic models. Exponential growth is described by the Malthusian model, in which unlimited resources are assumed, but environmental constraints are not taken into account. To overcome this limitation, the logistic equation was introduced by Verhulst, incorporating the concept of carrying capacity and providing a more realistic model of population dynamics. The logistic model is also applied in epidemiology, where it is used to describe the spread of infectious diseases.*

***Key words:** Malthusian exponential model, Verhulstian logistic model, allometry, epidemiology, mathematical models.*

REFERENCES

- [1] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, (2nd ed.), Springer, 2012.
- [2] Murray, J. *Mathematical Biology: An Introduction*, Volume 1 (3rd ed.), Springer, 2002.
- [3] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*, Springer–Verlag, 1993.
- [4] <https://bg.alegsaonline.com/art/2847>
- [5] S. Tersian, J. Chaparova, *Ordinary Differential Equations: Introduction via Mathematica*, Ruse University Press, 2005 (in Bulgarian).

⁹ This Report is presented on a Student Scientific Session on 12.05.2025 in “Financial Mathematics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper“ Cristal Prize’25, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>). The report reflects the results of the work on project № 25-FNSE-03.

THRESHOLD DYNAMICS IN A MODEL OF HIV INFECTION¹⁰

Ivan Ruslanov Tsankov – Student

Mathematical Modelling Master Programme

Department of Mathematics

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: vanko745@gmail.com

Assoc. Prof. Julia Chaparova, PhD

Department of Mathematics

University of Ruse “Angel Kanchev”

E-mail: jchaparova@uni-ruse.bg

***Abstract:** In this paper we review existing results for threshold dynamics in a model of early stage of HIV infection. The parameter sets are obtained in which the problem possesses biologically relevant equilibria, two infected and one uninfected equilibrium states. The local stability analysis of equilibria is characterized in terms of parameter values. A region in the parameter space is detected in which bistability occurs of the viral clearance state and one of the infected states.*

***Key words:** HIV infection model, homeostatic proliferation of T-cells, bistability, Routh-Hurwitz criterion.*

ВЪВЕДЕНИЕ

ХИВ е вирусът на човешката имунна недостатъчност (the human immunodeficiency virus). След откриването му от френските вирусолози Люк Монтание и Франсоаз Бар-Синуси през 1983 г. (за което двамата получават Нобелова награда през 2008 г.) и работата на американския учен Робърт Гало, схемата, по която действа вирусът, е добре изучена. ХИВ инфекцията включва три периода: остра фаза - вирусът инфектира CD4+ Т-клетките на имунната система, образуват се нови вирусни частици (вириони) от инфектираните клетки, които от своя страна заразяват нови клетки. Вирусът инфектира Т-клетки в лимфните възли и други системи на организма като по този начин инфекцията се разпространява, а в кръвта се установява висок вирусен товар. Острата ХИВ инфекция продължава около 2 до 10 седмици.

Хроничната ХИВ инфекция е втората фаза на болестта. При тази фаза вирусният товар се понижава, вирусът остава в организма, но се размножава най-вече в лимфните възли. Този период се нарича още латентна ХИВ инфекция, която често е безсимптомна и може да продължи до 10 години.

Третата фаза е Синдром на придобита имунна недостатъчност (СПИН), характеризира се с прогресивно (експоненциално) разрушаване на Т-клетки, нарушено функциониране на имунната система и предразположеност към опортюнистични инфекции (инфекции, причинени от бактерии, гъбички и вируси, които не водят до инфекции при индивиди с нормално функционираща имунна система) и неоплазми (различни видове рак). Последните са най-честата причина за смърт при лица, диагностицирани с ХИВ/СПИН, [6].

Поради своята агресивна природа в третата фаза на болестта и почти безсимптомното протичане на първите две фази, ХИВ инфекцията е коварно заболяване, с което трябва да се води непрекъснатата борба. По тази причина в България и по света се провеждат редовно кампании за изследване и ранна диагностика на ХИВ.

Математическото моделиране е ценен инструмент, чрез който могат да се анализират инфекциозните заболявания и в частност ХИВ инфекциите. В настоящата работа е разгледан модел за ранен етап на ХИВ инфекция в човешкия организъм. Това е динамична система по

¹⁰ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика” с оригинално заглавие на български език: ПРАГОВИ ДИНАМИКИ В МОДЕЛ НА ХИВ ИНФЕКЦИЯ.

отношение популациите на здравите Т-клетки, инфектираните клетки и вирионите - инфекциозни частици (други състояния в жизнения цикъл на вируса), разположени в междуклетъчното пространство, които са способни да инициират нови инфекции. За разлика от класическите модели, при този модел е добавен член (известен като функция на Michaelis-Menten), отразяващ хомеостатичното производство на нови Т-клетки вследствие присъствието на вируса. Хомеостазата е способността на организма да се противопоставя на промени, за да запази стабилна и относително постоянна вътрешната среда. Хомеостатичната пролиферация е именно този процес, при който в организма се увеличава броят на новите Т-клетки като отговор на нашествието на ХИВ.

В първата част на статията е формулиран математическият модел, който зависи от 8 положителни параметъра. Предложена е еквивалентна динамична система, в която броят на параметрите е сведен до 5. Втората част на работата се отнася до определяне стационарните състояния на системата и областите в пространството на параметрите, в които тези състояния са биологично обусловени. Третата част е посветена на анализа на тяхната локална устойчивост. Изложението следва основно [4].

ОБОСНОВКА НА МОДЕЛА И ПАРАМЕТРИТЕ

Разглеждаме следната динамична система по отношение популациите на здравите Т-клетки $T(t)$, на инфектираните с вируса клетки $I(t)$ и на вирионите $V(t)$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \lambda + \frac{\rho}{C+V}TV - kTV - d_T T \\ \frac{dI}{dt} = kTV - d_I I \\ \frac{dV}{dt} = pI - d_V V \end{cases} \quad (1)$$

Тук с λ е означена скоростта на създаване на нови клетки от цялата популация, d_T, d_I, d_V представляват съответно смъртността на здравите Т-клетки, на инфектираните и на вирионите, k е скоростта на инфекцията от закона за действие на масите, p е скоростта на създаване на вириони от инфектираните клетки. Изразът $\frac{\rho}{C+V}TV$ задава хомеостатичното производство на Т-клетки, в който $\frac{\rho V}{C+V}$ е функцията на Michaelis-Menten (ρ е максималната хомеостатична скорост, а C е константа на Michaelis).

С подходяща смяна на променливите системата (1) може да се сведе до следната безразмерна система, в която броя на параметрите е редуциран от 8 на 5 параметъра

$$\begin{cases} \frac{dT^*}{dt^*} = R_0 + \frac{R_m}{1+\beta V^*} T^* V^* - T^* V^* - T^* \\ \frac{dI^*}{dt^*} = \alpha_1 (T^* V^* - I^*) \\ \frac{dV^*}{dt^*} = \alpha_2 (I^* - V^*) \end{cases} \quad (2)$$

Тук $T^* = \frac{pk}{d_I d_V} T$, $I^* = \frac{pk}{d_T d_V} I$, $V^* = \frac{k}{d_T} V$ са безразмерните популации на здравите Т-клетки, на инфектираните Т-клетки и на ХИВ-вирионите, $t^* = d_T t$ е безразмерното време, $R_0 = \frac{\lambda pk}{d_T d_I d_V}$ е базовото репродуктивно число, $R_m = \frac{\rho}{Ck}$ е друго репродуктивно число, породено от функцията на Michaelis-Menten, $\alpha_1 = \frac{d_I}{d_T}$, $\alpha_2 = \frac{d_V}{d_T}$, $\beta = \frac{d_T}{Ck} < 1$ (всички параметри в системите (1) и (2) са положителни). В разглежданията по-нататък ще изпусваме символа * в безразмерната система за облекчаване на записването.

СТАЦИОНАРНИ СЪСТОЯНИЯ

Да отбележим изрично, че всички по-нататъшни разглеждания се отнасят до областта $R_0 > 0, R_m > 0$. Стационарните състояния $\begin{pmatrix} \bar{T} \\ \bar{I} \\ \bar{V} \end{pmatrix}$ на (2) са решения на системата

$$\begin{aligned} R_0 + \frac{R_m}{1+\beta V} TV - TV - T &= 0 \\ \alpha_1(TV - I) &= 0 \\ \alpha_2(I - V) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В сила е следната

Теорема 1 (1) Ако

$$R_0 > 1 - \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{R_m})^2, \quad (4)$$

безразмерната система (2) притежава три стационарни състояния

$$E_u = \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_i^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{V}_+ \\ \bar{V}_+ \end{pmatrix}, \quad E_i^- = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{V}_- \\ \bar{V}_- \end{pmatrix},$$

където

$$\bar{V}_{+/-} = \frac{-(\beta(1 - R_0) + (1 - R_m)) \pm \sqrt{(\beta(1 - R_0) + (1 - R_m))^2 - 4\beta(1 - R_0)}}{2\beta}$$

и $\bar{V}_{+/-}$ са реални числа.

(2) Ако

$$0 < R_0 < 1 - \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{R_m})^2,$$

безразмерната система (2) притежава само едно стационарно състояние E_u .

(3) Ако

$$R_0 = 1 - \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{R_m})^2,$$

безразмерната система (2) притежава две стационарни състояния E_u и $E_i^+ \equiv E_i^-$.

Доказателство. Решаваме система (3). От последното уравнение следва $\bar{I} = \bar{V}$, което заместено във второто уравнение дава $\bar{V}(1 - \bar{T}) = 0$. Едно решение е $\bar{V} = 0$, откъдето $\bar{I} = 0$ и от първото уравнение $\bar{T} = R_0$. По този начин получихме стационарното състояние E_u .

Друго решение на уравнението $\bar{V}(1 - \bar{T}) = 0$ е $\bar{T} = 1$. Тогава първото уравнение се преобразува в

$$R_0 + \frac{R_m}{1 + \beta \bar{V}} \bar{V} - \bar{V} - 1 = 0,$$

което е еквивалентно на квадратното уравнение за \bar{V}

$$\beta \bar{V}^2 + (\beta(1 - R_0) + (1 - R_m))\bar{V} + (1 - R_0) = 0. \quad (5)$$

В случай, че дискриминантата му е по-голяма или равна на 0, то има реални решения $\bar{V}_{+/-}$. Остава да се докаже, че неравенството

$$(\beta(1 - R_0) + (1 - R_m))^2 - 4\beta(1 - R_0) > 0 \quad (6)$$

е еквивалентно на неравенство (4). Лявата страна на (6) се преобразува до

$$\beta^2(1 - R_0)^2 - 2\beta(1 + R_m)(1 - R_0) + (1 - R_m)^2 = A^2 - 2(1 + R_m)A + (1 - R_m)^2,$$

където $A = \beta(1 - R_0)$. Корените на квадратното уравнение $A^2 - 2(1 + R_m)A + (1 - R_m)^2 = 0$ са $A_{1/2} = (1 \pm \sqrt{R_m})^2$, следователно (6) е еквивалентно на

$$\beta(1 - R_0) < (1 - \sqrt{R_m})^2 \text{ или } \beta(1 - R_0) > (1 + \sqrt{R_m})^2,$$

което е равносилно на

$$R_0 > 1 - \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{R_m})^2 \text{ или } R_0 < 1 - \frac{1}{\beta}(1 + \sqrt{R_m})^2.$$

От биологични съображения $\beta < 1$, следователно дясното неравенство отпада понеже $R_0 > 0$. Остава само лявото неравенство, което съвпада с (4).

Забележка. Състоянието E_u е неинфектирано, понеже в това състояние броят на инфектираните Т-клетки и на вирионите е равен на 0. В епидемиологията E_u се означава като състояние на вирусен клирънс, а E_i^+ и E_i^- са състояния с персистираща инфекция, [1,2].

Следваща стъпка в анализа е намиране на области за параметрите, в които E_i^+ и E_i^- са биологично обусловени, т.е. $\bar{V}_{+/-}$ са положителни реални числа. Тези области ще наричаме области на съществуване на стационарните състояния.

Теорема 2 Ако

$$1 > R_0 > 1 - \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{R_m})^2, \quad R_m > 1, \quad (7)$$

то $\bar{V}_{+/-}$ са положителни реални числа. Ако $R_0 > 1$, то \bar{V}_+ е положително за всяко $R_m > 0$.

Доказателство. Понеже $\bar{V}_{+/-}$ са корени на квадратното уравнение (5), от формулите на Виет следва, че $\bar{V}_{+/-}$ са положителни реални числа тогава и само тогава, когато

$$\begin{cases} R_0 > 1 - \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{R_m})^2 \\ \bar{V}_+ + \bar{V}_- = -\frac{1}{\beta}(\beta(1 - R_0) + (1 - R_m)) > 0 \\ \bar{V}_+ \bar{V}_- = \frac{1}{\beta}(1 - R_0) > 0 \end{cases}$$

От последното неравенство следва $R_0 < 1$ и тогава от второто неравенство получаваме $R_m > 1$. Накрая от първото неравенство следва условието $\beta(1 - R_0) + (1 - R_m) < 0$. Второто твърдение следва непосредствено от формулата за \bar{V}_+ в Теорема 1.

ЛОКАЛНА УСТОЙЧИВОСТ НА СТАЦИОНАРНИТЕ СЪСТОЯНИЯ

За изследване локалната устойчивост на стационарните състояния на (2) ще използваме следните две теореми.

Теорема (Хартман-Гробман, [3]) Нека $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ с матрица на Якоби $D\mathbf{f}(X) = (\partial f_i / \partial x_j)$ и нека $\mathbf{f}(X_0) = \mathbf{0}$.

(1) Ако всички собствени стойности на матрицата $A = D\mathbf{f}(X_0)$ на линеаризираната система $\dot{X} = AX$ имат отрицателни реални части, то стационарната точка X_0 на нелинейната система

$$\dot{X} = \mathbf{f}(X) \quad (8)$$

е локално асимптотически устойчива.

(2) Ако матрицата $A = D\mathbf{f}(X_0)$ на линеаризираната система $\dot{X} = AX$ няма собствени стойности с нулеви реални части и има поне една собствена стойност с положителна реална част, то стационарната точка X_0 на нелинейната система (8) е неустойчива.

Теорема (критерий на Routh - Hurwitz, [5]) Нека $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и X_0 е стационарна точка на нелинейната система (8). Необходимото и достатъчно условие характеристикният полином

$$P(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

на линеаризираната система $\dot{X} = AX$ с $A = D\mathbf{f}(X_0)$ да има корени $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ с отрицателни реални части е коефициентите му да удовлетворяват условията:

- (1) $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, и
- (2) $a_2a_1 - a_3a_0 > 0$.

Теорема 3 Ако $R_0 < 1$, то E_u е локално асимптотически устойчиво състояние, а ако $R_0 > 1$, то E_u е неустойчиво. Освен това, навсякъде в областта (7) на съществуване на E_i^- това състояние е неустойчиво. Накрая стационарното състояние E_i^+ е локално асимптотически устойчиво в областта на съществуване, ако

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{1 + \beta\bar{V}_+}(\beta\bar{V}_+^2 + R_0 - 1) < (\alpha_1 + \alpha_2)R_0(\alpha_1 + \alpha_2 + R_0), \quad (9)$$

иначе е неустойчиво.

Доказателство. Полагаме

$$\mathbf{f}(X) = \begin{pmatrix} R_0 + \frac{R_m}{1 + \beta V}TV - TV - T \\ \alpha_1(TV - I) \\ \alpha_2(I - V) \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} T \\ I \\ V \end{pmatrix}.$$

Тогава динамичната система (2) се записва като $\dot{X} = \mathbf{f}(X)$ и матрицата на Якоби на \mathbf{f} е

$$D\mathbf{f}(X) = \begin{pmatrix} \left(\frac{R_m}{1 + \beta V} - 1\right)V - 1 & 0 & \frac{R_m T}{(1 + \beta V)^2} - T \\ \alpha_1 V & -\alpha_1 & \alpha_1 T \\ 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

За неинфектираното стационарно състояние $E_u = (R_0, 0, 0)^T$ имаме

$$D\mathbf{f}(E_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & (R_m - 1)R_0 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 R_0 \\ 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

и собствените стойности са решения на

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & (R_m - 1)R_0 \\ 0 & -\alpha_1 - \lambda & \alpha_1 R_0 \\ 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Характеристичният полином е

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\lambda + \alpha_1\alpha_2(1 - R_0))$$

с корени $\lambda_1 = -1$ и

$$\lambda_{2/3} = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1 - R_0)}}{2}.$$

Ясно е, че при $R_0 < 1$ всички корени са с отрицателни реални части и E_u е локално асимптотически устойчиво състояние. При $R_0 > 1$ два от корените са отрицателни реални числа и един е положителен, следователно E_u е неустойчиво състояние в този случай.

Сега разглеждаме двете инфектирани състояния $E_i^- = (1, \bar{V}_-, \bar{V}_-)^T$ и $E_i^+ = (1, \bar{V}_+, \bar{V}_+)^T$, където \bar{V}_- и \bar{V}_+ са решения на (5). От

$$Df(E_i^\pm) = \begin{pmatrix} -R_0 & 0 & \left(\frac{R_m}{(1 + \beta\bar{V}_\pm)^2} - 1 \right) \\ \alpha_1\bar{V}_\pm & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

получаваме характеристичния полином

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + R_0)\lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)R_0\lambda + \frac{\alpha_1\alpha_2\bar{V}_\pm}{(1 + \beta\bar{V}_\pm)^2} [(1 + \beta\bar{V}_\pm)^2 - R_m].$$

Като се използва (5), последното събираемо може да се опрости. Непосредствено се проверява, че

$$\frac{\bar{V}_\pm}{1 + \beta\bar{V}_\pm} [(1 + \beta\bar{V}_\pm)^2 - R_m] = \beta\bar{V}_\pm^2 + R_0 - 1.$$

По този начин характеристичният полином е

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + R_0)\lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)R_0\lambda + \frac{\alpha_1\alpha_2}{1 + \beta\bar{V}_\pm} (\beta\bar{V}_\pm^2 + R_0 - 1).$$

От критерия на Routh - Hurwitz следва, че корените на $P(\lambda)$ са с отрицателни реални части тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенство (9) и

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{1 + \beta\bar{V}_\pm} (\beta\bar{V}_\pm^2 + R_0 - 1) > 0. \quad (10)$$

За да завършим доказателството на Теорема 3 трябва да покажем, че неравенство (10) е вярно за \bar{V}_+ и (10) не е вярно за \bar{V}_- в областите на съществуване на стационарните състояния E_i^+ и E_i^- съответно. От Теорема 2 тези области се определят с неравенство (7) и допълнително за E_i^+ се добавя и областта $R_0 > 1$.

Първо ще докажем, че (10) е вярно за \bar{V}_+ . Наистина, ако $R_0 > 1$, то (10) е вярно. Нека сега е в сила (7). Тогава

$$b := \beta(1 - R_0) + (1 - R_m) < 0.$$

Полагаме $a = \beta$, $c = 1 - R_0$. Тогава \bar{V}_\pm са корени на квадратното уравнение $a\bar{V}^2 + b\bar{V} + c = 0$, откъдето

$$\bar{V}_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} > \frac{2c}{-b},$$

понеже неравенство (7) гарантира $b^2 - 4ac > 0$ (от доказателството на Теорема 1 неравенства (6) и (4) са еквивалентни). По този начин

$$\bar{V}_+ > \frac{2c}{-b} \Leftrightarrow -b\bar{V}_+ - 2c > 0 \Leftrightarrow a\bar{V}_+^2 - c > 0 \Leftrightarrow \beta\bar{V}_+^2 + R_0 - 1 > 0$$

и (10) е вярно.

Сега ще докажем, че (10) не е вярно за \bar{V}_- . Както горе,

$$\bar{V}_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} < \frac{2c}{-b}.$$

По този начин $\beta\bar{V}_-^2 + R_0 - 1 < 0$ и (10) не е вярно. С това теоремата е доказана.

Забележка. При фиксирани стойности на α_1 , α_2 и β неравенства (7) и (9) задават област в равнината (R_m, R_0) , в която присъства биустойчивост на вирусния клирънс E_u и едното от персистиращите инфекциозни състояния E_i^+ . Това означава, че динамиката на системата в тази област зависи от началните данни на вирусния товар и количеството на здравите Т-клетки в организма по време на заразяването с ХИВ. Тези заключения се съгласуват с медицински данни за протичането на болестта, [4 и позоваванията там].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В класическия модел за ранен етап на ХИВ инфекция в човешкия организъм, без наличието на функцията на Michaelis-Menten, се определят две стационарни състояния – вирусен клирънс и персистиращо инфекциозно състояние. Доказано е, че те са глобално асимптотически устойчиви в области за параметрите, при които е налице дихотомия, т.е. взаимно изключващи се области. Това означава, че асимптотичното поведение на системата зависи само от параметрите, включени в модела, и ако базовото репродуктивно число е по-малко от 1, състоянията на системата приближават вирусния клирънс, а ако базовото репродуктивно число е по-голямо от 1, заболяването персистира. При това се изключва възможността за зависимост на клиничната картина от първоначалното състояние на пациента при заразяването с ХИВ.

В настоящата работа, следвайки [4], е разгледан модел за ранен етап на ХИВ инфекция, в който функцията на Michaelis-Menten отразява хомеостатичното производство на нови Т-клетки вследствие присъствието на вируса. Намерена е област в пространството на параметрите, в която динамичната система притежава три стационарни състояния – вирусен клирънс и две персистиращи инфекциозни състояния. При изследване локалната устойчивост на трите стационарни състояния е определена област за параметрите, в която и двете стационарни състояния E_u и E_i^+ са локално асимптотически устойчиви. Към кое от тях – вирусния клирънс или персистиращото инфекциозно състояние – ще се приближава развитието на болестта зависи до голяма степен както от началната концентрация на здравите Т-клетки в организма при заразяването с ХИВ, така и от началния вирусен товар.

БЛАГОДАРНОСТИ

Докладът отразява резултати от работата по проект № 2025 – ФПНО – 03, финансиран от фонд „Научни изследвания“ на Русенски университет „Ангел Кънчев“.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, (2nd ed.), Springer, 2012.
- [2] O. Diekmann, H. Heesterbeek, T. Britton, *Mathematical Tools For Understanding Infectious Disease Dynamics*, Princeton University Press, 2013.
- [3] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, N.Y., Berlin, 1993.
- [4] S. Pankavich, N. Neri, D. Shutt, Bistable Dynamics and Hopf Bifurcation in a Refined Model of Early Stage HIV Infection, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Ser. B, Vol. 25 (8), 2020, doi:10.3934/dcdsb.2020044.
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Routh%E2%80%93Hurwitz_stability_criterion
- [6] <https://www.synevo.bg/sindrom-na-pridobita-imunna-nedostatachnost-spin/>

MATHEMATICAL MODELING OF SCHEDULE PLANNING USING ILP WITH LEGAL AND OPERATIONAL CONSTRAINTS¹¹

Tsvetelina Ivanova, Student

Financial Mathematics Student,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: tsvetelina.iv.02@gmail.com

Assoc. Prof. Ivan Georgiev, PhD

Department of Applied Mathematics and Statistics,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: irgeorgiev@uni-ruse.bg

***Abstract:** This paper presents an integer linear programming (ILP) model for automated scheduling of driver shifts, integrating legal rules and technical constraints. Non-linear relations are linearized via the Big M method, ensuring computational tractability without loss of precision. Implemented in MATLAB and validated with real data, the model proves effective in meeting regulatory and operational requirements while remaining adaptable to change. The approach, applicable across sectors like transport and healthcare, supports cost reduction and improved work conditions. The study contributes a flexible ILP-based framework for scheduling with an emphasis on compliance and sustainability.*

***Key words:** shift optimization, ILP, scheduling, transportation, human resource planning.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Планирането на работни графици с множество ограничения е нетривиална задача с широко приложение в сектори като транспорт, здравеопазване [1] и производство. Целочисленото линейно програмиране (ILP) [2] предлага ефективен подход за автоматизация на този процес, позволявайки съчетаване на правни изисквания и технически условия. В настоящото изследване се разработва ILP модел [3], който използва техниката Big M [4] за линеаризация на зависимости и е реализиран в MATLAB [5] с реални данни. Моделът постига пълно съответствие с трудовото законодателство [6] и оперативните нужди [7], като същевременно намалява административната тежест и повишава продуктивността на предприятията.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Основните цели на това изследване са да се открие валиден план за графика на работния процес и да се отговори на регулаторните и оперативните изисквания. По този начин биха могли да се намалят грешките при съставяне на графици и да се увеличи производителността на бизнесите.

За да се конструира математическият модел [3], е необходимо да се конкретизират някои оперативни и законови (според Българското законодателство [6]) ограничения:

Продължителност на смените: Денят се разделя на 3 работни смени (сутрешна, междинна и вечерна), като всяка от тях е с продължителност 8 часа, за да се осигури пълно покритие на 24-часовия цикъл.

Правоспособност на водачите: Ограничения се налагат и поради това, че не всеки водач е правоспособен да управлява всички видове транспортни средства, с които разполага автопаркът.

¹¹ Докладът е представен на студентската научна сесия на 12.05.2025 г. в секция „Финансова математика“ с оригинално заглавие на български език: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ НА ПЛАНИРАНЕ НА ГРАФИК С ПОМОЩТА НА ILP СЪС ЗАКОНОВИ И ОПЕРАТИВНИ ОГРАНИЧЕНИЯ

Разпределение на превозните средства по смени: Транспортната мрежа е изградена от линии, като всяка линия се обслужва от предварително определени превозни средства за дадена смяна.

Почивка между смените: Съгласно чл. 152 от Кодекса на труда работникът или служителят има право на непрекъсната междудневна почивка, която не може да бъде по-малко от 12 часа [6]. За да не се разделят смените от работния ден, в модела ще бъде наложено ограничение между всеки две смени, при които даден водач е бил ангажиран, да има поне 2 последователни смени почивка ($2 \cdot 8 = 16$ часа).

Седмична почивка: Съгласно чл. 153. (1) (Изм. - ДВ, бр. 100 от 1992 г.) от Кодекса на труда при петдневна работна седмица работникът или служителят има право на седмична почивка в размер на два последователни дни, от които единият е по начало в неделя. В тези случаи на работника или служителя се осигурява най-малко 48 часа непрекъсната седмична почивка [6]. За да се спази това законово изискване, ще бъде наложено ограничение за непрекъсната 48-часова почивка всяка седмица за всеки един от водачите.

За да се изгради математически модел, чието решение дава валиден план-график, удовлетворяващ всички тези изисквания, се въвеждат следните неизвестни променливи:

$$X_{ijr} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i^{\text{ти}} \text{ водач работи } j^{\text{та}} \text{ смяна на } r^{\text{то}} \text{ превозно средство} \\ 0, & \text{ако } i^{\text{ти}} \text{ водач не работи } j^{\text{та}} \text{ смяна на } r^{\text{то}} \text{ превозно средство} \end{cases}, \quad \begin{matrix} \forall i = \overline{1, n} \\ \forall j = \overline{1, m} \\ \forall r = \overline{1, p} \end{matrix}$$

където n е броят на водачите, m е броят на работните смени, за които се извършва планирането, а p е броят превозни средства, с които разполага автопаркът. При разглеждана 7-дневна работна седмица с по 3 смени, всяка по 8 часа, общият брой смени е $m = 21$. Приема се, че първата работна смяна от седмицата започва в 00:00 ч. в понеделник, а последната започва в 16:00 в неделя, същата седмица. Например, под 7-ма смяна следва да се разбира сутрешната смяна за ден сряда. Тази предпоставка е условна и не ограничава модела, ако първата работна смяна започне през друг час, различен от посочения.

Предварително са известни следните оперативни данни:

$$a_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i^{\text{ти}} \text{ водач може да управлява } r^{\text{то}} \text{ превозно средство} \\ 0, & \text{ако } i^{\text{ти}} \text{ водач не може да управлява } r^{\text{то}} \text{ превозно средство} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall i = \overline{1, n} \\ \forall r = \overline{1, p} \end{matrix}$$

Матрицата A с елементи a_{ir} дава информация за всеки водач дали е правоспособен да управлява дадено ПС от автопарка.

$$b_{rj} = \begin{cases} 1, & \text{ако } r^{\text{то}} \text{ превозно средство се ползва през } j^{\text{та}} \text{ смяна} \\ 0, & \text{ако } r^{\text{то}} \text{ превозно средство не се ползва през } j^{\text{та}} \text{ смяна} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall r = \overline{1, p} \\ \forall j = \overline{1, m} \end{matrix}$$

Матрицата B с елементи b_{rj} дава информация кои ПС-та трябва да бъдат използвани за всяка смяна.

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } i^{\text{ти}} \text{ водач е работил през предпоследната смяна от предходната седмица} \\ 0, & \text{в противен случай,} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } i^{\text{ти}} \text{ водач е работил през последната смяна от предходната седмица} \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Векторите U и V с елементи u_i и v_i дават информация за това дали даден водач е работил съответно предпоследната и последната смяна от предходната седмица.

За да се удовлетвори изискването за 48-часова непрекъсната почивка на всеки водач, всички 21 работни смени (7 дена * 3 смени) са разделени на групи от по 6 последователни работни смени (6 смени * 8 часа = 48 последователни часа). Тези групи са $m - 5$ на брой (в разглеждания случай са 16). Те са номерирани по такъв начин, че номерът на дадена група да

съвпада с номера на първата неработна смяна от групата. Например в първата група влизат последователно смени от първа до шеста, в осмата група влизат последователно смени от осма до тринадесета, а в последната шестнадесета група влизат последователно смени от шестнадесета до двадесет и първа.

Дефинира се неизвестната променлива Y_{ik} , която ще дава информация за това дали i -ти водач е почивал през k -та група (шестица от последователни смени) от почивни смени:

$$Y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i\text{-ти водач почива } k\text{-та група от смени} \\ 0, & \text{ако } i\text{-ти водач не почива } k\text{-та група от смени} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, n} \\ \forall k = \overline{1, m-5}$$

След като са дадени всички входни параметри и са дефинирани необходимите неизвестни променливи, следва да се съставят ограниченията [7], отразяващи спецификите на поставения проблем.

Едно естествено ограничение е това, че един водач за дадена смяна може да управлява не повече от едно превозно средство (ПС). Това е отразено в неравенство (1).

$$\sum_{r=1}^p X_{i,j,r} \leq 1, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m} \quad (1)$$

Друго от тези ограничения е, че дадено ПС, може да се управлява само от водач, който има необходимата правоспособност:

$$X_{ijr} \leq a_{ir}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m}, \forall r = \overline{1, p} \quad (2)$$

За всяка работна смяна са известни конкретните ПС, които трябва да се ползват, при обслужване на транспортните маршрути. Това налага ограничение (3):

$$\sum_{i=1}^n X_{ijr} = b_{rj}, \quad \forall j = \overline{1, m}, \forall r = \overline{1, p}, \quad (3)$$

което изпълнява условието да се осигури точно един водач на всяко от дадените ПС, които ще се ползват през дадената смяна.

С цел спазване на законовото изискване за 48-часова почивка за всяка работна седмица, е необходимо всеки работник да има поне 6 поредни работни смени почивка (6 смени * 8 часа = 48 часа). Следните две ограничения гарантират спазването на това изискване:

$$\sum_{j=k}^{k+5} X_{ijr} \leq M(1 - Y_{ik}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall k = \overline{1, m-5}, \forall r = \overline{1, p} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{m-5} Y_{ik} \geq 1, \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (5)$$

В ограничение (4) е използвана т. нар. техника „Big M“, където $M \gg 1$ е много голямо положително число, надминаващо многократно всички параметри на задачата [4].

Преди всяка смяна, в която i -ти водач е работил, е необходима почивка от 16 часа, която обхваща 2 поредни смени. За да се състави математическата формулировка на това ограничение, отново се използват неравенства и методът „Big M“ [4].

В общия случай, ако водач ще работи през дадена смяна, е необходимо той да е почивал през предходните 2 последователни смени. В дясната част на неравенството се използва стойността на X за текущата смяна, извадена от 1 (т. е. ако водачът работи през текущата смяна, то дясната част от неравенството ще бъде 0, което означава, че водачът е почивал през предходните 2 смени. Това условие се налага със следното ограничение:

$$\sum_{r=1}^p (X_{i,j-2,r} + X_{i,j-1,r}) \leq M(1 - \sum_{r=1}^p X_{i,j,r}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{3, m} \quad (6)$$

Ограничение (6) не включва в себе си първата и втората работни смени на текущата седмица. За коректното планиране на графика през първите 2 работни смени е необходимо да се знае заетостта на всеки водач през предпоследната (u_i) и последната (v_i) работни смени на изминалата седмица. Следващите две неравенства отчитат наложените ограничения за първите две смени на графика, който ще се планира:

$$u_i + v_i \leq M(1 - \sum_{r=1}^p X_{i,1,r}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall r = \overline{1, p} \quad (7)$$

$$v_i + \sum_{r=1}^p X_{i,1,r} \leq M(1 - \sum_{r=1}^p X_{i,2,r}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall r = \overline{1, p} \quad (8)$$

След формулирането на всички ограничения, задачата може да бъде разглеждана като задача, чиято цел е намирането на поне едно решение на система от линейни алгебрични неравенства с бинарни променливи. Решението на такава система не е тривиално, тъй като не съществува обща и универсална математическа теория за намиране на решение в случая на дискретни допустими множества. Поради тази причина се предлага трансформиране на задачата в стандартна форма на целочислено линейно оптимиране (ILP) [2] чрез въвеждане на фиктивна целева функция с нулев вектор. Тази стъпка позволява да се използват утвърдените теоретични и числени методи на линейното оптимиране. В новополучената задача не се цели минимизиране или максимизиране на стойността на целевата функция, а единствено намиране на първоначален опорен план, удовлетворяващ всички ограничения [7]. Полученото решение (ако съществува) ще бъде допустимо спрямо оригиналната задача и по този начин ще изпълнява търсената функционалност, без да се изисква допълнително подобрене. Тогава целевата функция приема следния вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^p 0X_{ijr} \quad (9)$$

Така окончателният вид на модела е:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^p 0X_{ijr} \quad (10)$$

$$\sum_{r=1}^p X_{i,j,r} \leq 1, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m} \quad (11)$$

$$X_{ijr} \leq a_{ir}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m}, \forall r = \overline{1, p} \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ijr} = b_{rj}, \quad \forall j = \overline{1, m}, \forall r = \overline{1, p} \quad (13)$$

$$\sum_{j=k}^{k+5} X_{ijr} \leq M(1 - Y_{ik}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall k = \overline{1, m-5}, \forall r = \overline{1, p} \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{m-5} Y_{ik} \geq 1, \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (15)$$

$$\sum_{r=1}^p (X_{i,j-2,r} + X_{i,j-1,r}) \leq M(1 - \sum_{r=1}^p X_{i,j,r}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{3, m} \quad (16)$$

$$u_i + v_i \leq M(1 - \sum_{r=1}^p X_{i,1,r}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall r = \overline{1, p} \quad (17)$$

$$v_i + \sum_{r=1}^p X_{i,1,r} \leq M(1 - \sum_{r=1}^p X_{i,2,r}), \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall r = \overline{1, p} \quad (18)$$

$$X_{ijr} \in \{0,1\}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m}, \forall r = \overline{1, p} \quad (19)$$

$$Y_{ik} \in \{0,1\}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall k = \overline{1, m-5} \quad (20)$$

ЧИСЛЕНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Пример. В следващите таблици са дадени входни данни с матрици А, В и вектори U и V, както следва:

В Таблица 1 е дадена информация за правоспособността на всеки водач да управлява конкретните превозни средства, като всеки ред съответства на определен водач, а всяка колона – на конкретно превозно средство.

Таблица 1. Информация за правоспособността на всеки водач да управлява всяко ПС

| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 16 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Данните в Таблица 2 съответстват на матрицата В, даваща информация за това през кои смени какви ПС-та се използват. По редове са изведени данните за всяко ПС, а всеки стълб съответства на конкретна смяна от седмицата.

Таблица 2. Информация кои ПС-та трябва да бъдат използвани за всяка смяна

| B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Векторите U и V , даващи информация за това дали даден водач е работил през предпоследната и последната смени от предходната седмица са показани в Таблица 3.

Таблица 3. Информация за това дали даден водач е работил съответно предпоследната и последната смяна от предходната седмица

| Водач | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| U | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Решение:

В Таблица 4 е даден план-графикът за една работна седмица. Данните в нея следва да се интерпретират по следния начин: водач 1 през втората и осмата работна смяна управлява 5-то ПС, през единадесета смяна управлява 3-то и през осемнадесета и двадесет и първа работни смени управлява 15-то ПС. По аналогичен начин следва да се интерпретира работният график и на останалите водачи. От решението, показано в Таблица 4 се вижда, че са изпълнени всички законови и оперативни ограничения.

Таблица 4. План-график за една работна седмица

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 15 |
| 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 6 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11 | 0 | 0 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 11 | 0 |
| 9 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14 |
| 10 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящото изследване е представен иновативен подход за автоматизирано генериране на валиден работен график чрез прилагане на методи от теорията на разписанията и целочислено линейно програмиране (ILP) [2]. Разработеният математически модел [3] съчетава законови изисквания [6], като минимални почивки и ограничения за максимална заетост, с технически и оперативни ограничения [7]. Чрез използване на метода Big M [4] нелинейните зависимости са линеаризирани, което позволява ефективно решаване на модела в среда MATLAB [5] с реални данни. Резултатите показват, че моделът е по-добър от ръчните подходи по отношение на точност, време за изчисление и съответствие с нормативната уредба. Гъвкавостта на предложеното решение позволява неговото приложение не само в транспортния сектор, но и в здравеопазването [1] и производството. Моделът предлага стабилна основа за бъдещо разширение, включващо фактори като динамично натоварване, сезонност и предпочитания на служителите. Така той допринася за развитието на устойчиви и ефективни стратегии за управление на работното време в различни индустриални и сервизни сектори.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата работа е подкрепена от Научния фонд на Русенския университет по проект № 2025-ФПНО-02.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Burke, E.K., De Causmaecker, P., Berghe, G.V., Van Landeghem, H. (2004). The State of the Art of Nurse Rostering. *Journal of Scheduling*, 7, 441-499.
- [2] Taha, H.A. (2017). *Operations Research: An Introduction*. 10th Edition, Pearson Education.
- [3] Winston, W., Goldberg, J. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms*. 4th Edition, Thomson Brooks/Cole.
- [4] Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2010). *Introduction to Operations Research*. 9th Edition, McGraw-Hill Education.
- [5] Chapra, S.C. (2011). *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. 3rd Edition, McGraw-Hill Education.
- [6] Labor Code. URL: <https://www.justice.government.bg/home/normdoc/1594373121> (Accessed on 17.04.2025). (*Оригинално заглавие: Кодекс на труда*).
- [7] Brucker, P., Qu, R. (2006). Personnel Scheduling: Models and Complexity. *European Journal of Operational Research*, 170(2), 435-447.

INFORMATICS

FRI-1.416.1-SSS-I-01

GRAPH SHORTEST PATH ALGORITHMS AND THEIR APPLICATIONS¹²

Hristo Hristov – Student

Department of Informatics and Information Technologies
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 89 680 1366
E-mail: s236266@stud.uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Galina Atanasova, PhD – Supervisor

Department of Informatics and Information Technologies
University of Ruse “Angel Kanchev”
Phone: +359 82 888 326
E-mail: gatanasova@uni-ruse.bg

Abstract: *This paper provides a review of shortest-path algorithms across several categories: single source shortest path, all-pairs shortest path, and heuristic algorithms. We review both classical algorithms and recently developed approaches, analyzing and comparing them to one another to determine their practical applications and efficiency in terms of computational complexity and memory usage. This paper aims to provide insights into the trade-offs among these algorithms while summarizing recent developments in the field of graph theory.*

Key words: *Graph, Shortest Path Algorithms, Trade-Offs, Optimizations, Recent Developments.*

REFERENCES

- [1] Taheri-Dehkordi, M. (2024). *Graph Theory; History, Applications and Vision*. Journal of Mathematics and Society. ResearchGate
- [2] Roughgarden, T. (2018). *Algorithms Illuminated: Graph algorithms and data structures. Part 2*. Soundlikeyourself Publishing LCC.
- [3] Robinson, S. (2023, February 17). *What is Graph Data Science? A complete introduction to critical new ways of analyzing your data*. Graphable AI. <https://www.graphable.ai/blog/graph-data-science/>
- [4] Erdos, P., Rényi, A. (1960). *On the evolution of random graphs*. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 5(1), 17-60.
- [5] Ahuja, R., Mehlhorn, K., Orlin, J. and Tarjan, R. 1990. *Faster algorithms for the shortest path problem*. J. ACM 37, 2 (April 1990), 213–223. <https://doi.org/10.1145/77600.77615>
- [6] Bernstein, A., Nanongkai, D., Wulff-Nilsen, C. (2023). *Negative-weight single-source shortest paths in near-linear time*. *arXiv preprint arXiv:2203.03456*. <https://arxiv.org/abs/2203.03456>

¹² This Report is presented on a Student Scientific Session on 8 May 2025 in the “Informatics” section and nominated for publication in Compiled edition of Reports Awarded with “Best Paper“ Cristal Prize’25, as a hard copy (ISBN 978-954-712-826-2) and on-line on the Conference Website (<http://conf.uni-ruse.bg/bg/?cmd=dPage&pid=bestPapers>).

- [7] Johnson, D. (1977). *Efficient Algorithms for Shortest Paths in Sparse Networks*. J. ACM 24, 1 (Jan. 1977), 1–13. <https://doi.org/10.1145/321992.321993>
- [8] Zou, X. (2013). *An Improved SPFA Algorithm for Single-Source Shortest Path Problem Using Forward Star Data Structure*.
- [9] *Las Vegas algorithm*. (n.d.). Wikipedia. Retrieved May 1, 2025, from https://en.wikipedia.org/wiki/Las_Vegas_algorithm
- [10] Nakov, P., Dobrinkov, P. (2015). *Programming++ Algorithms; (5th edition)*. Software University
- [11] Rubio, F. (2023, June 6). *Pathfinding Algorithms- Top 5 Most Powerful*. Graphable. Retrieved May 1, 2025, from <https://www.graphable.ai/blog/pathfinding-algorithms/>

FRI-1.416.1-SSS-I-02

ROLE OF THE PROJECT MANAGER IN THE SUCCESSFUL MANAGEMENT AND BUILDING OF A SOFTWARE PROJECT / VIDEO GAME¹³

Teodora Daskalova – Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: tdaskalova044@gmail.com

Martin Dzhurov

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: mdzhurov@uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Galina Atanasova, PhD – Supervisor

Department of Informatics and Information Technologies,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: gatanasova@uni-ruse.bg

***Abstract:** This report presents the role of the project manager in software project management, with a specific focus on the video game industry. Due to the increasing complexity and dynamics in the IT industry, the need for strategically planned and quality project management is a key factor in achieving successful results. The main phases of the project cycle — from initiation to closure — and leading methodologies such as Agile, Waterfall and RUP are examined, with an emphasis on their applicability in a video game development (gamedev) environment. The key responsibilities of the project manager are analyzed: time, budget, quality, scope and team management. Attention is paid to the specific challenges of game development, such as working with cross-functional teams and the need to balance creativity and business goals. Based on the study and practical examples, it is concluded that adaptive management, good communication and the application of agile approaches are crucial for the success of a game software project.*

***Key words:** Approaches, challenges, management, components for success, software project, computer game, methodology, personal experience.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Настоящия доклад има за цел да дефинира и анализира ролята на проектния мениджър (ПМ) в софтуерното инженерство, като акцентира върху спецификата при разработването на видеоигри. Темата е особено актуална в днешната технологична среда, в която софтуерните проекти стават все по-комплексни, а конкуренцията и очакванията от страната на потребителите все по-високи.

С нарастващата нужда от структурирано и гъвкаво управление, ролята на ПМ-а се утвърждава като критична за успеха на всеки софтуерен проект. ПМ-ът е фигурата, която осигурява свързаност между идеята, бизнес целите и техническото изпълнение. Той управлява комуникацията между заинтересованите страни, планира ресурсите и следи за спазването на срокове и качество.

В процеса на разработка на дадена видеоигра, задачата на проектния мениджър става още по-сложна. Той се изправя пред различни предизвикателства като освен технологичните аспекти, трябва да се съчетаят и творческите компоненти - “геймдизайн (gamedesing)”, звук, визия, сценарий. Това налага сътрудничество и екипност от специалисти в различни области.

¹³ Докладът е представен на студентската научна сесия на 08 май 2025 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: РОЛЯ НА ПРОЕКТНИЯ МЕНИДЖЪР В УСПЕШНОТО УПРАВЛЕНИЕ И ИЗГРАЖДАНЕ НА СОФТУЕРЕН ПРОЕКТ / ВИДЕОИГРА.

В този контекст ПМ-а трябва да бъде гъвкав и последователен за достигане до ефективно координиране на мултидисциплинарни екипи.

В доклада ще бъдат разгледани ключовите процеси, методологии и добри практики в управлението на софтуерни проекти, като фокусът ще бъде поставен върху спецификациите при създаване на видеоигрите като уникален тип продукт.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Основни процеси

Основните процеси за разработка на софтуерен проект или по друг начин казано 5-те стъпки в процеса на управление за проекти, през които преминава всеки софтуерен продукт и оформят неговия жизнен цикъл са инициране, планиране, изпълнение, мониторинг и контрол, закриване. Следващите параграфи дефинират тяхната същност, придружени с примери в контекста на разработката на видеоигра.

1. Инициране (Стартиране на проекта/ Проучване за стартиране/ осъществимост на проекта) (Initiation): В този начален етап се дефинира основната идея и целите на проекта. Идентифицират се заинтересованите страни (stakeholders), анализира се първоначалната осъществимост и се оформя бизнес казус или още наречен обосновка за започване на проекта. **В разработването на видеоигра:** Решение за създаване на нова игра, определяне на жанра и основната идея.

2. Планиране (Planning): Създава се подробен план, който включва обхвата на проекта, времевата рамка, необходимите ресурси, бюджет, рискове и механизми за контрол. **В разработването на видеоигра:** Създаване на график за разработка, определяне на екипите (програмуисти, дизайнери, звукови инженери, артисти) и разпределяне на задачите.

3. Изпълнение (Execution): В тази стъпка се извършва реалната работа по проекта - екипът разработва, тества и интегрира компонентите на софтуера според плана. Проектният мениджър следи за изпълнението спрямо графика, управлява комуникацията и координира дейностите. **В разработването на видеоигра:** Програмиране на игровата механика, създаване на графики и звукови ефекти, интегриране на различните компоненти.

4. Наблюдение (мониторинг) и контрол (Monitoring and Controlling): Паралелно с изпълнението се извършва активно проследяване на напредъка, анализ на рисковете, контрол върху бюджета и качеството. Целта на тази стъпка е да се гарантира, че проекта се движи в рамките на зададените ограничения. **В разработването на видеоигра:** Тестване на играта за бъгове, оценка на производителността и прилагане на корекции при отклонения в плана.

5. Маркетинг на проекта - това не е класическа фаза според PMBOK®[1], но е критичен елемент в пазарно ориентирани проекти, каквито са игрите. Това е фаза, която продължава през целия жизнен цикъл на проекта, дори след неговото окончателно издаване. Основни акценти:

- a. **Планиране на мерктринг стратегия** - определяне на целевата аудитория, бюджет и времева линия. Тази дейност започва още преди фазата *Планиране* на проекта;
- b. **Създаване на предварителен интерес** - чрез трейлъри, тийзъри, убесайт, социални мрежи и партньорства с инфлуенсъри;
- c. **Early Access/ Beta Testing** - използване на ранен достъп като инструмент не само за събиране на обратна връзка, но и за изграждане на общност и интерес към играта;
- d. **Участия с събития и изложби** - презентации на конференции, онлайн демонстрации, включване в платформи като Steam Next Fest или GameDev World.

6. Закриване (Closure): Последният етап, през който се преминава е формално приключване на проекта, който включва предаване на готовия продукт, анализ на постиганатото, оформяне на документацията и извличане на поуки, които да послужат в

бъдещи проекти. **В разработването на видеоигра:** Пускане на играта на пазара, събиране на обратна връзка от потребителите и анализ за успеха на проекта.

Компоненти на успеха

Успешното реализиране на един софтуерен проект зависи от няколко взаимно свързани компонента, които съставят така наречения “троен ограничен триъгълник” (The Triple Constraint) [14], разширен в съвременната практика и с удовлетвореност на клиента.

1. Времева рамка (Time): За ефективността на проекта първо се определя времето като се вземе в предвид колко задача и след това се изчислява и поставят крайните срокове. При не спазване и забавяне в определения график може да се стигне до увеличаване на разходите и намаляване на удовлетвореността на клиента и целевата публика (fanbase).

2. Бюджетиране (Cost): Финансовото планиране и контролът на разходите е от съществено значение. Ресурсите могат да са работна ръка/труд, могат да са материали, необходими за работата, ресурси за управление и оценка на риска. Отговорност на ПМ е да:

- a. Оценява разходите за всички задачи в обхвата на проекта;
- b. Създава бюджет (или бюджетна рамка) на проекта като се основава на прогнозираните разходи за проекта;
- c. Контролира всички разходи по проекта, за да не надвишава одобрения бюджет (пряко обвързано с времевата рамка);
- d. Коригира бюджета на проекта, ако е необходимо.

3. Качество (Quality): Има стандарти за качество за всеки проект, независимо дали крайният му резултат е материален или нематериален продукт. ПМ-ът се нужда е от *план за управление на качеството*, за да контролира качеството. Контролът на качеството включва тестване, валидация и подобрения. Изключително важно е в процеса на разработка да се следи качеството, тъй като бъгове, които са открити на по-късен етап в разработката, стават много скъпи за отстраняване - ангажират се програмисти, тестери, отделя се повторно време, а от там и допълнителни средства.

4. Обхват (Scope): Той се състои от необходимите задачи за постигане на целите на проекта. Той определя функциите, характеристиките и съдържанието, които ще бъдат включени в разглеждане софтуерен проект. Ясно дефинираните цели на проекта помагат в предотвратяването на така наречения “пълзящ обхват” (), който често е причина за провал или увеличение на разходите. Тук е от изключителна важност приоритизирането на задачите, което помага за планиране и ефективно разпределение на ресурсите. За да бъде правилно управляван обхвата, проектният мениджър трябва да:

- a. Използва план за управление на обхвата, за да определи какви дейности ще се извършват по време на проекта;
- b. Споделя плана за управление на обхвата с всички заинтересовани страни, за да може всички да са на една страница;
- c. Управява очакванията на заинтересованите страни, с цел поддържане обхвата на проекта;
- d. Използва инструменти и техники за управление на задачите, за да следи всички дейности по проекта.

5. Удовлетворение на клиента и целевата аудитория (Customer satisfaction): Крайната цел на проекта е да отговаря или надминава очакванията на клиента. Дори ако проектът е завършен в срок, в рамките на бюджета и с желаното качество, той може да се счита за неуспешен, ако не отговаря на очакванията на клиента. За тази цел активната комуникация между проектният мениджър и клиента е от изключително значение през целия жизнен цикъл на проекта за постигане на висока удовлетвореност.

Методологии за управление на софтуерни проекти:

Съществуват различни методологии за управление на проекти, които се избират в зависимост от спецификата на проекта, екипа и крайните цели. Ето основните методологии:

1. Waterfall (Водопаден модел, Класически жизнен цикъл): Най-старият модел на структурирано разработване на софтуер. Предлага систематизиран, последователен подход към разработването на софтуер [15].

2. Agile (Гъвкав): Появяват се през 90-те години на 20-ти век. Предлага олекотени процедури, ориентирани към генериране на качествен продукт в полза на клиента, опиращи се на взаимодействието между участниците (клиенти и разработчици) и интегриращи в себе си възможността за постоянна промяна в целите и изискванията [16].

Методологията “въстава” срещу:

- a. тежки процедури, генериращи огромно количество документация;
- b. фокусирането върху процесите, плановете и договори, водещо до голяма бюрокрация, трудно пренасочване на приоритетите и прехосване на сили и енергия.

3. Scrum: Изключителната популярност се дължи на неговата простота и лекота за внедряване. Методология е за управление на проекти, включващи малък екип. Дефинира само организационни и социални практики. Процесът се състои от отделни итерации, наречени спринтове. Обикновено дължината на спринта е един месец. В края на всеки спринт се инсталира версия на системата. Scrum е метод за управление на проекти, който позволява бързо развитие и редовна комуникация.

4. Kanban: Методът произлиза от японски език. Канбан е визуален инструмент за управление на проекти, който позволява на потребителите да виждат завършени и неизпълнени задачи. Визуализацията се състои от карти със истории и физическо или дигитално табло с три колони - *Да се свърши*, *В процес на изпълнение* и *Готово*.

5. RUP - Rational Unified Process (Рационален Унифициран Процес): RUP е процес за разработка на софтуер за обектно-ориентирани модели. Той е итеративен и постепенен подход за подобряване на познанията за проблемите чрез последователни ревизии. Той постепенно подобрява ефективното решение чрез повтарящи се итерации. Комбинира елементи от Waterfall и Agile: има фази (инициация, елаборация, конструкция, трансфер) и повторяемост на дейностите. Структуриран, но все пак позволява известна адаптация[10].

6. Хибридни методологии - например Agile + RUP:

- a. Комбинират стабилността на структурирани методологии (като RUP) с гъвкавостта на Agile;
- b. Често използван в големи екипи или при дългосрочни проекти, където различните екипи имат различни нужди.

Сравнителна характеристика между някои от споменатите методологии за управление на софтуерни проекти са изложени в **Таблица 1**.

Таблица 1. Сравнителна таблица на методологии за управление на софтуерни проекти

| Критерий | Waterfall (Водопаден модел) | Agile (Гъвкав подход) | RUP (Рационален Унифициран Подход) |
|-----------|-------------------------------------|--|--|
| Подход | Линеен и последователен | Инкрементален и итеративен | Итериращ с фиксирани фази |
| Гъвкавост | Ниска - трудна адаптация | Висока - промени са лесни | Средна - комбинира структура и адаптивност |
| Фази | Строго разпределни (анализ, дизайн) | Кратки спринтове, честа обратна връзка | Инициране, елаборация, конструкция, трансфер |

| | | | |
|---------------------------|---|--|---|
| Подход към промени | Трудно се прилагат по-късно | Очакват се и се приветстват | Възможни са в границите на фазите |
| Документация | Силно формализирана | Минимална, фокус върху работещ софтуер | Изисква документация, но не прекомерна. |
| Подходящ за | Малки, стабилни проекти с ясни изисквания | Динамични проекти с неясни изисквания | Средни до големи проекти, нуждаещи се от баланс |
| Рискове | Висок риск от грешки в късен етап | Ранно откриване на проблеми | Разпределя риска по фази |

Инструменти за управление на софтуерни проекти

Проектният мениджър често разчита на специализиран софтуер за управление на проекти, за да управлява ефективно проекти по софтуерно инженерство. Тези инструменти, като **Jira**, **Asana**, **Trello**, **Github**, са от съществено значение за управление на проекти, предлагайки платформа за проследяване на задачите, управление на зависимости и сътрудничество с членовете на екипа.

Jira: Един от най-мощните инструменти за организиране на задачи и управление на agile екипи. Софтуерът е базиран на agile методологията. Използва се за много цели, включителни проследяване на грешки, проследяване на проблеми и управление на проекти.

Asana: Характерното за платформата е, че предлага йерархия от списъци със задачи, към които могат да се прикачат документи, коментари, отделни членове на екипа и крайни срокове.

Trello: Главно се използва за организиране на проекти, задачи и идеи. Благодарение на визуалния си интерфейс, базиран на карти и таблици, е лесно да се създават списъци със задачи, да се преместват елементи между етапите на проекта и да се сътрудничи с други хора.

Github: Универсален инструмент с функции подходящи за Agile управление на проекти. През 2016 е внедрена функционалност за таблата в стил Kanban. Това улеснява потребителите да организират работата си в проекти. Позволява на потребителите да създават задачи и да ги възлагат на останалите членове на екипа; да обменят идеи с бележки, рецензии и споменавания; проследяват историята на задачите, собствеността и напредъка; добавяне на хора към екипите и разпределяне на роли и делегиране на отговорности чрез подобряване на правата за достъп [12].

Предизвикателства и успешни практики в разработването на видеоигри:

Разработването на видеоигри се отличава съществено от традиционните софтуерни проекти. В стандартните бизнес приложения се залага основно на функционалност, ефективност и надеждност, игрите комбинират интерактивност, креативност и преживяване. По този начин ПМ освен технически умения, трябва да има и способността да управлява и силно креативни процеси и многофункционални екипи.

Особености при програмирането на игри като тип софтуерен проект:

- a. Итеративен и креативен процес, който често не следва строго последователна логика;
- b. Игровият софтуер е емоционален продукт, ориентиран към ангажирана и преживяване, а не само към изпълнение на задачи;
- c. Много компоненти се разработват паралелно, като често няма пълна яснота за крайния резултат в началните фази.

Крос-функционални екипи

В разработката на игри участват различни дисциплини:

- a. Програмисти - архитектура, логика, оптимизация;
- b. Игрови дизайнери - механики на играта, баланс;
- c. Артисти - 2D/3D графики, анимации, потребителски интерфейс (UI);
- d. Звукови дизайнер - музика, ефекти, озвучаване;
- e. Тестери (QA) - откриване на бъгове, геймплей несъответствия;
- f. Проектният мениджър - координация между екипите, приоритети, комуникация.

В този тип игрови софтуер комуникацията между толкова различни роли е изключително важна, затова от ПМ-а се изисква да може да преведе идеите и нуждите на всеки между "езици" - технически, артистичен и бизнес.

Баланс между креативност и бизнес цели

Това е едно от най-големите предизвикателства в създаването на игра - играта трябва да бъде едновременно:

- a. Интересна и иновативна - да има артистична и различна визия;
- b. Стабилна и технически изпълнима - инженерен контрол;
- c. Пазарно ориентирана и продаваема - бизнес цели.

ПМ-ът има изключително важна роля в създаването на баланс между:

- d. Желания на геймдизайна;
- e. Ограничения на енджина;
- f. Бюджетни и времеви рамки;
- g. Очаквания на потребители.

Добри практики за управление на гейм проекти:

- a. Въвеждане на Agile със спринтове и демо срещи;
- b. Използване на инструменти за проследяване на задачите и екипна работа като Jira, Github и Trello;
- c. Постоянно приоритизиране и адаптиране на обхвата на играта според реалностите;
- d. Насърчаване на креативността и сигурността в екипа.

Примери за успешна и неуспешна игра:

Успешна игра: Hades (Supergiant Games)

- a. Използване на Agile методология с кратки итерации и честа обратна връзка чрез ранно достъпната версия;
- b. Стегнат, мотивиран екип, който комбинира артистичност и техническа зрялост;
- c. Постигнат баланс между визията на дизайна и реалностите на бюджета.

Неуспешна игра: Cyberpunk 2077 (CD Projekt Red)

- a. Сложен проект с амбициозни цели, но лошо управление на очакванията и графика;
- b. Недостатъчно време за QA и оптимизация;
- c. Проблеми с вътрешната комуникация между екипите, особено в периоди на адистанционна работа;
- d. Показва рисковете от пренебрегване на реалистични времеви и ресурсен мениджмънт.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Управлението на софтуерни проекти е сложен и многостранен процес, който изисква съчетание от технически знания, организационни умения и междуличностна комуникация. В основата на един успешен проект стои ПМ, чиято роля е ключова за постигането на успех, като координира екипа, ресурсите и целите на проекта.

Разработката на видеоигри допълнително усложнява този процес, тъй като процеса на работа не се ограничава само до прилагането на софтуерни технологии, а налага съчетаване с артистични елементи и креативност. В този случай ПМ трябва да създаде правилна и предразполагаща работна среда, в която всички специалисти от различни области да могат да се разгърнат и реализират обща визия. Съществуващите предизвикателства като правилно управление на креативни конфликти, балансиране между бизнес целите и гемплей, също така и адаптиране към постоянно променящи се изисквания налагат прилагането на гъвкави методологии и ефективна комуникация.

ПМ в сферата на игрите не само трябва да познава инструментите и процесите на управление, но и да е комуникативен, да може да вдъхновява екипа си и да има визия за идеята и целта на играта. Ролята му не е просто да се завърши проекта навреме и в рамките на бюджета, а да улесни създаването на продукта. Софтуерът (видеоигра) трябва да е иновативен, качествен, въздействащ на потребителите и да има дълъг живот, което е обратна връзка за перфектно свършена работа от ПМ-а и неговия екип.

В заключение на разглежданата тема и всичко казано досега и както е споменато по-горе може да се каже, че доброто управление не се ограничава само до спазване на срокове и влизане в бюджета, а постигане на качествен, вдъхновяващ краен продукт. Централната фигура, която остава отговорна за всичко това и гарантира постигането на балнса между всички, остава Проектният Мениджър.

REFERENCES

- [1] PMBOK® - <https://www.scribd.com/document/804007527/PMP-7th-Edition>,
- [2] PRINCE2® - PRINCE2 Downloads | Templates & More Free PDFs | EUR
- [3] What is Software Project Management? - <https://www.wrike.com/project-management-guide/faq/what-is-software-project-management/>
- [4] Software engineering project management: Key roles and best - tools <https://www.teamwork.com/blog/software-engineering-project-management/>
- [5] What is Project Management? Definition, Concepts and Approaches | GeeksforGeeks - <https://www.geeksforgeeks.org/what-is-project-management/>
- [6] Phases of Project Management Process | GeeksforGeeks - <https://www.geeksforgeeks.org/phases-project-management-processes/>
- [7] What's a Project Manager in Software and What Do They Do? | Indeed.com - <https://www.indeed.com/career-advice/finding-a-job/project-manager-in-software>
- [8] Software Project Management (SPM) – Software Engineering | GeeksforGeeks - <https://www.geeksforgeeks.org/software-engineering-software-project-management-spm/>
- [9] Role and Responsibilities of a software Project Manager – Software Engineering | GeeksforGeeks - <https://www.geeksforgeeks.org/software-engineering-role-and-responsibilities-of-a-software-project-manager/>
- [10] What is RUP(Rational Unified Process) and its Phases? | GeeksforGeeks - <https://www.geeksforgeeks.org/rup-and-its-phases/>
- [11] Mastering engineering project management: Techniques, challenges, and career success - <https://getdx.com/blog/engineering-project-management/#tools-and-techniques-for-engineering-project-management>

[12] GitHub Project Management: Everything You Need to Know - <https://hubstaff.com/blog/github-project-management/>

[13] What Is Asana Project Management Tool? Everything You Should Know | Simplilearn - <https://www.simplilearn.com/tutorials/asana-tutorial/what-is-asana-project-management-tool>

[14] The Triple Constraint in Project Management: Time, Scope & Cost - <https://www.projectmanager.com/blog/triple-constraint-project-management-time-scope-cost>

[15] Софтуерен процес – фази, модели, езици за моделиране. Класически модели на жизнения цикъл на софтуерна система. Водопаден модел - Лекция на доц. д-р П. Христова, РУ, 2024 г.

[16] Съвременни техники за разработване на софтуер. Гъвкави методологии - Лекция на доц. д-р П. Христова, РУ, 2024 г.

PHYSICALLY BASED RENDERING (PBR) IN TSAR GAME ENGINE¹⁴

Serkan Sadulov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 87 892 5635
E-mail: Ssadulov@uni-ruse.com

Mustafa Mustafov – Student

Faculty of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 89 056 9310
E-mail: s216259@stud.uni-ruse.bg

Assoc. Prof. Kamelia Shoilekova, PhD

Department of Informatics and Information technologies,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 88 785 9224
E-mail: kshoilekova@uni-ruse.bg

***Abstract:** The report presents the integration of Physically Based Rendering (PBR) in the Tsar Game Engine, a proprietary game engine developed in-house. The main focus is on PBR's capability of PBR to enhance visual realism through the use of physically accurate surface material models and light interaction. The key components of PBR — albedo, metalness, roughness, and normal maps — are described, along with their roles in achieving photorealistic scene rendering. A comparison between traditional rendering techniques and PBR highlights the advantages of this new approach. The report also analyzes the challenges related to hardware requirements, asset preparation and memory usage. In conclusion, it was demonstrated that the implementation of PBR in the Tsar Game Engine significantly improved the quality of graphical representation, bringing it closer to modern standards in the gaming industry.*

***Key words:** Physically Based Rendering (PBR), игрови двигател, компютърна графика, визуален реализъм, материални свойства, рендериране, Tsar Game Engine, текстуриране, осветление, нормална карта.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Физически обоснованото рендериране (Physically Based Rendering, PBR) представлява съвременен метод в компютърната графика, който моделира взаимодействието между светлината и материалите въз основа на физични закони. Известен още като физическо рендиране, този подход се е утвърдил като основен стандарт в съвременната гейм индустрия поради своята способност да постига висока степен на фотореализъм. Основната цел на PBR е да възпроизведе автентично визуалното поведение на различни повърхности и осветление чрез използване на реалистични стойности за физическите характеристики на материалите. В рамките на текстурирането, физически обоснованото рендериране се базира на параметрично описание на повърхностите, включващо ключови характеристики като базов цвят (albedo), металност (metalness) и грапавост (roughness), които дефинират как даден обект и/или материал реагира по време на осветяването в сцена [1].

¹⁴ Докладът е представен на студентската научна сесия на 08 май 2025 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: ФИЗИЧЕСКИ ОБОСНОВАНО РЕНДЕРИРАНЕ (PBR) В TSAR GAME ENGINE.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Основни компоненти на PBR

Основните компоненти на материалите, базирани на физически обосновано рендериране (PBR), се реализират чрез набор от специализирани текстурни карти. Всяка от тях има за цел да опише определени физически свойства на повърхността и да повлияе на начина, по който тя взаимодейства със светлината. Тези карти позволяват висока степен на визуален реализъм, без да се увеличава геометричната сложност на обектите [3]. Сред най-често използваните и значими карти в този процес се открояват следните:

- **Албедо (основен цвят):** представлява базовият цвят на даден материал. При неметалните повърхности този параметър определя основния видим цвят, който се възприема като резултат от разсейване на светлината. За металните повърхности албедото служи основно за задаване на цвета на отраженията, а не на самия материал. Когато стойността на параметъра „металност“ е 0, материалът изглежда като матова повърхност (напр. пластмаса или керамика), като ясно се вижда основният му цвят. При стойност на металност 1 материалът се държи като метал – доминират отраженията на околната среда, а собственият му цвят става едва забележим или изцяло изчезва.

- **Металност:** този параметър (често реализиран чрез текстурна карта) определя дали даден материал се държи като метал или неметал. Стойност 0 съответства на неметални повърхности, като дърво, пластмаса или текстил, при които се наблюдава основно разсейване на светлината и ясно се вижда базовият цвят на материала. Стойност 1 обозначава поведение, характерно за чист метал — в този случай повърхността силно отразява околната среда, като собственият ѝ цвят е слабо изразен или напълно отсъства. Стойности между 0 и 1 могат да се използват за създаване на сложни или преходни материали, като замърсени, корозирали или смесени повърхности.

- **Грапавост (roughness):** този параметър описва степента на неравност на микроскопичното релефно покритие на повърхността и оказва пряко влияние върху характера на отраженията. Стойност 0.0 съответства на идеално гладка повърхност, при която отраженията са остри и ясно дефинирани, подобно на огледало или полиран метал. При стойност 1.0 повърхността е силно грапава, което води до дифузно разпръснати и неясни отражения. Ниски стойности на грапавост създават концентрирани отблясъци и лъскав външен вид, докато по-високи стойности придават на материала матов, мек и визуално разсеян облик.

- **Нормална текстура (normal map):** представлява специализирана карта, която кодира локални отклонения в ориентацията на повърхността с цел симулиране на фини геометрични детайли, като изпъкналости, вдлъбнатини, драскотини или релеф. Вместо да се използва реално увеличаване на геометричната сложност чрез добавяне на полигони, тази техника променя нормалния вектор на повърхността на пикселно ниво. Това води до визуално усещане за дълбочина и сложност, като значително подобрява начина, по който светлината взаимодейства с обекта. В резултат се постига повишен реализъм на материала, особено при променящи се ъгли на осветление и наблюдение [2].

Примерна сцена от игровия двигател Tsar

Сцената включва разнообразни обекти, всеки от които е снабден с физически обосновани (PBR) материали (Фиг. 1).



Фигура 1. Примерна сцена от игровият двигател Tsar

Сравнение „Преди и След“

- Традиционно рендерирание: при този подход се използват сравнително опростени осветителни модели, като например тези на Ламберт и Фонг, при които дифузният и спекуларният компонент на отразената светлина се изчисляват и комбинират поотделно. Материалите обикновено се описват чрез стандартен набор от текстури, като „дифузна“, „спекуларна“ и „гланцовост“, чиито стойности често се коригират ръчно и инкрементално, с цел постигане на визуално приемлив резултат. Поради липсата на физически обоснована основа, този метод често води до ограничена фотореалистичност и до несъответствия в представянето на материалите между различни сцени или графични среди [4], [5].

- PBR рендерирание: физически обоснованото рендерирание (Physically Based Rendering) заменя традиционните емпирични приближения с научно издържани модели, които по-прецизно описват взаимодействието между светлината и материалите. Вместо субективно настойване на визуални параметри, всички материали се дефинират чрез измерими физически характеристики, като албедо (базов цвят), металност, грапавост и нормали. Това позволява постигане на визуални резултати, които са консистентни между различни сцени и условия на осветление, без нужда от ръчна адаптация.



Фигура 2. Разлика с и без PBR

В резултат, сцените, реализирани чрез PBR, се характеризират с по-висока степен на фотореализъм и визуална достоверност. Допълнително предимство на този подход е възможността за автоматично адаптиране на поведението на светлината в сцената, съгласно

физичните закони на отражение и пречупване. Това елиминира необходимостта от използване на остарели техники като „запичане“ на светлина в текстури (light baking), характерни за по-ранни методи за рендериране.



Фигура 3. Разлика с и без PBR

Ползи от използването на PBR

- По-голям реализъм: физически обоснованото рендериране осигурява фотограметрична автентичност на материалите, като изчислява отразената светлина въз основа на реални физични закони. Това води до генериране на изображения, които са изключително близки до визуалното възприятие на реалния свят. В резултат на това се постига по-убедително потапяне на зрителя и по-висока степен на визуална достоверност на обекти и среди.

- Консистентност и съвместимост: използването на физически параметри за описване на материалите позволява лесното прехвърляне на активи и текстури между различни графични енджини и проекти, без необходимост от допълнително пренастройване за различни условия на осветление и среда. Това значително улеснява екипната работа, намалява времето за производство и спомага за поддържането на последователен художествен стил в рамките на целия проект.

- Подобро визуално качество: комбинацията на PBR материали с модерни графични техники, като глобално затъмнение, HDR осветление и трасировка на лъчи, допринася за по-богато и реалистично визуално изживяване. Тексурите, като нормални карти и други PBR карти, подобряват видимостта на фини детайли — леки грападини, релефи и други микроструктури – чрез естествено осветяване. В резултат сцените изглеждат по-наситени, по-детайлни и по-убедителни в сравнение с традиционните методи на рендериране.

Компромиси

- Хардуерни изисквания: физически коректните модели на осветление, характерни за PBR, изискват значително по-висока изчислителна мощност в сравнение с традиционните рендеринг методи. PBR шейдърите обработват множество параметри и текстурни карти, което води до по-голямо натоварване на графичния процесор (GPU) и процесора (CPU). Поради това често се налага използването на по-мощен хардуер или прилагането на оптимизации, особено при работа с устройства с ограничени ресурси. На по-слаби конфигурации комплексните PBR сцени могат да причинят спад на кадровата честота и забавяне на изпълнението в реално време.

- Подготовка на ресурси: създаването на висококачествени PBR материали е по-трудоемък процес, който изисква отделно авторизиране на множество текстурни карти, като алbedo, грападост, металност и нормални карти. Това налага използването на специализиран софтуер, например Substance Painter, Substance Designer или Quixel Suite и наличие на

експертни познания и опит в работа с физически базирани материали. Липсата на такъв опит може да удължи значително времето за подготовка и да повиши сложността на производствения процес.

- Използване на памет: един PBR материал обикновено изисква няколко текстури с висока резолюция, което увеличава общия размер на графичните ресурси. При наличието на множество обекти в сцена, всеки със собствени PBR карти, необходимата видеопамет може значително да нарасне, което усложнява управлението и оптимизацията на сцената в реално време. Това е особено критично за платформи с ограничени хардуерни възможности и налага внимателно балансиране между качество и производителност.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение, прилагането на физически обосновано рендерирание в Tsar Game Engine допринесе съществено за повишаване на качеството и реализма на визуалната част на проекта. Сцените, изградени с PBR материали, демонстрират по-автентични отражения и осветление в сравнение с традиционните рендеринг техники, като същевременно осигуряват консистентност при различни условия на осветление и среди. Въпреки че създаването и подготовката на PBR съдържание, изисква повече усилия и хардуерни ресурси, крайният визуален резултат е значително по-впечатляващ и съответства на съвременните стандарти в компютърната графика.

REFERENCES

1. RENDERING, Why Physically-Based. Physically-based rendering. *Procedia IUTAM*, 2015, 13.127-137: 3.
2. BERTHEAUX, Cyril, et al. Effect of material properties on emotion: a virtual reality study. *Frontiers in Human Neuroscience*, 2024, 17: 1301891.
3. FEI, Fan, et al. PacTure: Efficient PBR Texture Generation on Packed Views with Visual Autoregressive Models. arXiv preprint arXiv:2505.22394, 2025.
4. Sadulov S., M. Mustafov, K. Shoilekova "GAME ENGINE AND ENGINE COMPONENTS DESIGN AND DEVELOPMENT" Reports Awarded with "Best Paper" Crystal Prize'23, 62nd Annual Scientific Conference - University of Ruse and Union of Scientists, (2023): 173-178.
5. Mustafov M., K. Shoilekova "THE ROLE OF SCRIPTING IN THE GAME ENGINE" Reports Awarded with "Best Paper" Crystal Prize, (2024): 85-88

DATABASE CREATION AND MANAGEMENT¹⁵

Martin Nikolov – Student

Department of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
Tel.: +359 89 351 7292
E-mail: s226257@stud.uni-ruse.bg

Pr. Assist. Prof. Vasil Kozov, PhD – Supervisor

Department of Natural Sciences and Education,
University of Ruse “Angel Kanchev”
E-mail: vkozov@uni-ruse.bg

***Abstract:** The paper reviews existing methods of creating databases and manipulating the information in them using different methods and technologies. This project aims to address: (1) the different software programs that are used to create a database and what possibilities it gives for integration within other programs and (2) the possible means that can be used to manipulate the information within the database and its usage in different projects. The outlooks for each database are given after exploring and developing a working prototype with the given software where the functionalities are the same for all existing projects: being able to input information, to extract information and to manipulate the information (changing its values or deleting it).*

***Key words:** Database, Integration, Data management, Data manipulation.*

ВЪВЕДЕНИЕ

С цел съпоставяне на три различни метода за създаване и управление на бази от данни (БД) се създадох три проекта с еднакво базово съдържание, с три различни вида системи. Това съдържание включва четири таблици с произволни имена, които да служат като набор от входни данни. Два от разработените проекта работят с БД, включващи връзките(релациите) между отделните таблици, а третият е създаден с платформа която не поддържа работа с релационен вид БД. Всеки от проектите е разработен до такава степен, че да изпълнява три основни функционалности: въвеждане на данни, изобразяването на данните и тяхната манипулация.

Трите разработки бяха създадени в следният ред:

- Първата БД е създадена чрез VBA (Visual Basic for Applications), който е програмен език, вграден в платформата Microsoft Access.
- Втората БД е създадена чрез MySQL платформата с фронтенд използващ статични HTML страници, свързани към базата данни чрез JavaScript скрипт, който се изпълнява чрез Node.js.
- Третата БД е създадена на платформата Google Sheets, като се използва Python скрипт с Google Sheets API (Application Programming Interface) за да се установи връзката към платформата. От там, скриптът служи за да автоматизира създаването, форматирането и манипулирането на информацията на тази псевдо-БД.

¹⁵ Докладът е представен на студентската научна сесия на 08 май 2025 г. в секция „Информатика“ с оригинално заглавие на български език: СЪЗДАВАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ НА БАЗИ ОТ ДАННИ.

БД с VBA

Visual Basic for Applications (VBA) е програмният език, вграден в Access. VBA е изключително функционален и гъвкав. Благодарение на лесната му интеграция бази от данни в Access, той се използва широко в обработката и управление на данни. (Androsius, L., 2013). Кодът на VBA е разделен на модули, където потребителят може да отдели кода си за инициализация и манипулацията на данните по удобен за него начин.

```
Sub InsertTable()
    Dim db As Database
    Dim tblNew As TableDef
    Dim fldNew As Field
    Dim idxNew As Index
    Dim rel As Relation

    Set db = CurrentDb
    Set tblNew = db.CreateTableDef("Magazin")
    Set fldNew = tblNew.CreateField("MagazinNum", dbInteger)
    tblNew.Fields.Append fldNew
    Set fldNew = tblNew.CreateField("ImeU", dbText, 30)
    tblNew.Fields.Append fldNew
    Set fldNew = tblNew.CreateField("ImeM", dbText, 30)
    tblNew.Fields.Append fldNew
    Set fldNew = tblNew.CreateField("Typ", dbText, 30)
    tblNew.Fields.Append fldNew
    Set fldNew = tblNew.CreateField("Address", dbText, 30)
    tblNew.Fields.Append fldNew
    Set fldNew = tblNew.CreateField("FirmaNum", dbInteger)
    tblNew.Fields.Append fldNew
    db.TableDefs.Append tblNew
    MsgBox "Table 'Magazin' is created."
    With tblNew
        Set idxNew = .CreateIndex("MagazinNum")
        idxNew.Fields.Append idxNew.CreateField("MagazinNum")
        idxNew.Primary = True
        .Indexes.Append idxNew
    End With
End Sub
```

Фиг. 1. Създаването на таблиците

Даден е пример за създаването на таблица с име “Magazin”, където се задават имената на нейните колони (“MagazinNum”, “ImeU”, “ImeM”, “Typ”, “Address”, “FirmaNum”). При инициализирането на дадена таблица във VBA (Фиг. 1) се определя и нейният първичен ключ (Primary key), който служи за осъществяването на релационната структура на БД.

```
Sub InsertMagazin()
    Dim SQL As String
    SQL = "insert into Magazin values(1,'Dragan Petrov','Kaufland', 'Supermarket', 'bul. Lipnik', 7)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(2,'Simeon Velichkov','Praktiker', 'Stroitelen', 'bul. Lipnik', 2)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(3,'Borislav Slavchev','Billa', 'Supermarket', 'ul. Potsdam', 3)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(4,'Georgi Mihailov','LIDL', 'Supermarket', 'ul. Chiprovci', 4)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(5,'Marieta Antonieva','Anitom', 'Musicalen', 'pl. Svoboda', 7)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(6,'Petar Dzhurov','Tabacco Trade', 'Denonoshten', 'ul. Tundzha', 5)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(7,'Martin Nikolov','Ozone', 'Stroitelen', 'ul. Eduart Vinter', 7)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(8,'Ana Petrova','Demi', 'Denonoshten', 'ul. Tsar Osvoboditel', 8)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(9,'Valentin Valentinov','CBA', 'Supermarket', 'ul. Preslav', 9)"
    DoCmd.RunSQL SQL
    SQL = "insert into Magazin values(10,'Lubomir Velev','Mr.Bricolage', 'Stroitelen', 'ul. Dunavska', 5)"
    DoCmd.RunSQL SQL
End Sub
```

Фиг. 2. Въвеждане на данни в таблицата

Въвеждането на данните за всеки ред на таблицата “Magazin” се осъществява, като се използва заявка под формата на стринг(Фиг 2.). Данните които се въвеждат след това могат да се манипулират директно, чрез редакция в системата на Access, или индиректно, чрез заявки написани на SQL.

За да се манипулира информацията в базите данни се използват две от заявките с които се обработва и извежда определен набор от данни (Фиг. 3). В първият случай извеждаме данните от таблицата „Magazin”, като гледаме дали съответната информация в таблицата “Izchislenie” изпълнява дадените критерий: полето “StokObr” да е по-малко от 100000. В

следващата заявка се взема информацията от таблицата “Firma”, където се гледа дали тази фирма държи магазин, чийто тип е със стойност “Denonoshten”.

```

Sub Query()
Dim db As Database
Dim qdf As QueryDef
Dim strSQL As String
Dim rs As Recordset
Dim Firm_number As Integer

Set db = CurrentDb
strSQL = "SELECT ImeM, Typ, StokObr FROM Magazin, Izchislenie "
WHERE Izchislenie.MagazinNum = Magazin.MagazinNum AND StokObr < 100000"
Set qdf = db.CreateQueryDef("Query1", strSQL)
Set rs = qdf.OpenRecordset
rs.MoveLast
MsgBox "There are " & rs.RecordCount & " stores with StokObr < 10000"

Set db = CurrentDb
strSQL = "SELECT Firma.FirmaNum, ImeF FROM Firma, Magazin "
WHERE Magazin.Typ = 'Denonoshten' AND Firma.FirmaNum = Magazin.FirmaNum"
Set qdf = db.CreateQueryDef("Query2", strSQL)
Set rs = qdf.OpenRecordset
rs.MoveLast
MsgBox "There are " & rs.RecordCount & " firms with this type of store."

```

Фиг. 3. Заявки за манипулация на данни



Фиг. 4. Изглед на БД

С вградените функции в Access може да се създаде изглед на БД във вид на главна форма (Фиг. 4). Всяка команда е достъпна чрез бутон на който може да се зададе операция. Операциите варират от изпълнение на даден модъл във VBA, до ръчно въвеждане на данни в желана таблица.

БД с MySQL

За втората разработка се използва системата на MySQL, която служи за създаването и обработването на релационни бази данни. Релационната база данни съхранява информацията в отделни таблици, вместо да я поставя в едно огромно хранилище. Структурата на базата се организира във физически файлове, оптимизирани за бързодействие. Логическият модел с обекти като бази данни, таблици, изгледи, редове и колони, предлага гъвкава програмна среда (Axmark, D & Widenius, M., 2025). За да се осъществи визуализацията е използван набор от статични HTML (Hypertext Markup Language) страници. Те изпълняват ролята на форми през които потребителя може да въвежда, извежда и изтрива данни в БД. За да се свържат тези

страници с данните в MySQL е използвана средата Node.js, с която може да се изпълнява JavaScript код.

Създава се таблицата “Magazin” (Фиг. 5), идентична на тази която беше създадена в Access. Както и в първата разработка, таблицата “Magazin” се състои от 6 колони в които се записват входните данни (Фиг. 6).

```

1 • DROP DATABASE IF EXISTS Project1;
2 • CREATE DATABASE Project1;
3 • USE Project1;
4
5
6 • CREATE TABLE Magazin(
7     MagazinNum INT NOT NULL,
8     ImeU VARCHAR(50),
9     ImeM VARCHAR(50),
10    Typ enum ('Denonoshten','Supermarket','Stroitelen'),
11    AddressM VARCHAR(50),
12    FirmaNum INT NOT NULL,
13    Primary key(MagazinNum)
14 );

```

Фиг. 5. Създаването на таблиците MySQL

```

9  -- Table Magazin
10
11 • INSERT INTO Magazin VALUES (1, 'Dragan Petrov', 'Kaufland', 'Supermarket', 'bul.Lipnik', 1);
12 • INSERT INTO Magazin VALUES(2, 'Siemon Velichkov', 'Praktiker', 'Stroitelen', 'bul. Lipnik', 2);
13 • INSERT INTO Magazin Values(3, 'Borislav Slavchev', 'Billa', 'Supermarket', 'ul. Potsdam', 3);
14 • INSERT INTO Magazin Values(4, 'Georgi Mihailov', 'LIDL', 'Supermarket', 'ul. Chiprovci', 4);
15 • INSERT INTO Magazin Values(5, 'Marieta Antionieva', 'Anitom', 'Denonoshten', 'ul. Tundzha',5);

```

Фиг. 6. Въвеждане на данни в таблицата

```

23 • alter table Magazin
24   ADD Foreign key(FirmaNum) references Firma(FirmaNum);
25
26 • CREATE TABLE Izchislenie(
27     MagazinNum INT NOT NULL,
28     MesecNum INT NOT NULL,
29     StokObr DOUBLE,
30     PStokObr Double,
31     foreign key(MagazinNum) references Magazin(MagazinNum)
32 );
33
34

```

Фиг. 7. Определяне на връзките

Връзките в MySQL, за разлика от Access, могат да се определят когато се създава таблицата или след това (Фиг. 7).

Чрез порта по подразбиране на MySQL, който е 3306 и допълнителна информация за БД се създава връзката (Фиг. 9). Променливата “user” служи като името на платформата в MySQL а “database” и “password” са името и паролата на БД с която се свързва кода. След успешно изпълнение на програмата, в терминала на конзолата се връща съобщение за успешно свързване. За да се изпълни този код трябва се влезе в терминалния порт на папката, където се намира JavaScript файла и се пише командата “node” следвана от името на файла (Фиг. 8):

```
PS C:\Users\Asus\Desktop\MySQL> node app.js
Server running at http://localhost:3000
Connected to MySQL database!
```

Фиг. 8. Установена връзка

```
1 // CONNECTION
2 const express = require('express');
3 const mysql = require('mysql2');
4 const bodyParser = require('body-parser');
5 const app = express();
6 const cors = require("cors");
7 app.use(cors());
8 app.use(express.json());
9 app.use(bodyParser.urlencoded({ extended: true }));
10
11
12 const db = mysql.createConnection({
13   host: 'localhost',
14   port: 3306,
15   user: 'root',
16   password: 'Marti14120320!',
17   database: 'project1'
18 });
19
20 db.connect((err) => {
21   if (err) throw err;
22   console.log('Connected to MySQL database!');
23 });
```

Фиг. 9. Свързване на БД с HTML чрез Node.js

За разлика от Access, заявките които се използват при MySQL не са написани в системата а в JavaScript кодът (Фиг. 10), чрез който установяваме връзката на БД с HTML страниците. Те могат да бъдат разработени в системата на MySQL, но чрез JavaScript кодът заявките може директно да бъдат въведени в страниците като полета за въвеждане на желани критерии. Заявките за въвеждане и изтриване на данните работят по подобен начин. Те се изпращат като заявка от тип POST, която приема набор от входни данни с които изпълнява задаеното си условие.

```
27 app.post('/show', (req, res) => {
28   const sql = 'Select * From Magazin';
29   db.query(sql, (err, result) => {
30     if(err){
31       console.error('Error showing data:', err);
32       res.status(500).send('Database error');
33     } else {
34       console.log('Data shown:', result);
35       res.json(result);
36     }
37   })
38 })
39 });
```

Фиг. 10. Манипулиране на данните (заявки)

След изпълнението на заявката зададена като константата “sql” от тип String, данните взети от програмата се визуализират под формата на таблица (Фиг. 11). При визуализирането на таблицата (Фиг. 12) се изчаква отговор от заявката завършваща на “/show”. След като програмата получава резултат в терминала се изписва, че информацията е получена и се създават толкова редове и колони, колкото е броят на данните. Така се получава запълнена таблица от данни, които са извлечени от БД в MySQL.

Store Data

| ID | Manager Name | Store Name | Type | Address | Firm Number |
|----|--------------|-------------------|-------------|---------------|-------------|
| 1 | Kaufland | Dragan Petrov | Supermarket | bul.Lipnik | 1 |
| 2 | Praktiker | Siemon Velichkov | Stroitelen | bul. Lipnik | 2 |
| 3 | Billa | Borislav Slavchev | Supermarket | ul. Potsdam | 3 |
| 4 | LIDL | Georgi Mihailov | Supermarket | ul. Chiprovei | 4 |
| 5 | Anitom | Marieta Antonieva | Denonoshten | ul. Tundzha | 5 |

Фиг. 11. HTML таблица

```

<script>
  async function loadData() {
    try {
      const response = await fetch("http://localhost:3000/show", {
        method: "POST"
      });

      const data = await response.json();
      console.log("Received Data:", data);

      const tableBody = document.getElementById("table-body");
      tableBody.innerHTML = "";

      data.forEach(item => {
        const row = document.createElement("tr");
        row.innerHTML = `<td>${item.MagazinNum}</td>
          <td>${item.ImeM}</td><td>${item.ImeU}</td>
          <td>${item.Typ}</td><td>${item.AddressM}</td>
          <td>${item.FirmaNum}</td>`;
        tableBody.appendChild(row);
      });
    } catch (error) {
      console.error("Error fetching data:", error);
    }
  }

  window.onload = loadData;
</script>

```

Фиг. 12. Код на таблицата

Store Registration Form

Store ID:

Store Manager Name:

Store Name:

Type:

Address:

Firm ID:

Delete Store by id (Warning!)

Store ID:

Фиг. 13. Форма за въвеждане на информация


```
import gspread
from gspread_formatting import *
from google.oauth2.service_account import Credentials
import requests
import urllib.parse

scopes = [
    "https://www.googleapis.com/auth/spreadsheets"
]

creds = Credentials.from_service_account_file("api.json", scopes = scopes)
client = gspread.authorize(creds)

sheet_id = "16T4ECM3BI1-zbXVkp0i0tKgydh6CTiI6SmP8T7MfAdk"
workbook = client.open_by_key(sheet_id)
```

Фиг. 15. Модул за форматиране gspread

Скриптът в Python включва функции за инициализацията на входни данни, въвеждането им в отделните клетки на таблицата, форматирането на отделните клетки и създаването на заявки, които извеждат даден резултат. Форматирането на отделните клетки работи с адресацията им в Google Sheets която се състои от букви за колони (от А до Z) и цифри за редове (от 1 до n). Различните етапи на скрипта се разписват в сегменти (Фиг. 16, Фиг. 17, Фиг. 18, Фиг. 19).

```
valuesMesec = [
    ["Mesec"],
    ["MesecNum", "ImeMes", "GodM"],
    [9, None, 2019],
    [2, None, 2021],
    [3, None, 2019],
    [4, None, 2022],
    [5, None, 2019]
]
```

Фиг. 16. Входни данни за таблица “Mesec”

```
title = CellFormat(
    backgroundColor = Color(1,0,0),
    textFormat= TextFormat(bold = True),
    horizontalAlignment= 'Center')
fmt = CellFormat(
    backgroundColor = Color(0,0.8,0),
    textFormat = TextFormat(bold=True, foregroundColor = Color(0,0,0)),
    horizontalAlignment = 'Center')
sheet1 = workbook.worksheet('Mesec')
format_cell_range(sheet1, f"A2:C{len(valuesMesec)}", fmt)
format_cell_range(sheet1, "A1:C1", title)
```

Фиг. 17. Създаване на таблица “Mesec”

```
worksheet_list = map(lambda x:x.title, workbook.worksheets())
new_worksheet_name = "Mesec"

if new_worksheet_name in worksheet_list:
    sheet = workbook.worksheet(new_worksheet_name)
else:
    sheet = workbook.add_worksheet(new_worksheet_name, rows = 10, cols = 10)
```

Фиг.18. Въвеждане и форматиране на клетките в таблицата

```

query = 'select B where C < 2022'
url = 'https://docs.google.com/spreadsheets/d/'
+ sheet_id + '/gviz/tq?sheet=' + 'Mesec' + '&tqx=out:csv&tq=' + urllib.parse.quote(query)
res = requests.get(url)
rows = res.text.splitlines()
show = [['Months before the year 2022!']] + [[row] for row in rows[1:]]
format_cell_range(sheet1, "E1", title)
format_cell_range(sheet1, f"E2:E{len(show)}", fmt)
    
```

Фиг. 19. Създаване на заявки и форматиране на клетките в таблицата

| Mesec | | | Months before the year 2022! |
|----------|----------|------|------------------------------|
| MesecNum | ImeMes | GodM | "September" |
| 6 | June | 2019 | "February" |
| 2 | February | 2021 | "March" |
| 3 | March | 2019 | "May" |
| 4 | April | 2022 | |
| 5 | May | 2019 | |

Фиг. 20. Манипулиране на данни (заявки)

След като се изпълни всеки етап от скрипта като краен резултат се извежда таблицата “Mesec” и до нея таблица с резултат от зададената заявка. Заявката изважда имената на всички месеци, за които е зададена година преди 2022 (Фиг. 20). Въпреки връзката между скрипта и таблицата, те работят автономно едно от друго. По този начин може да се съчетае работата на двете системи за да се направи подобие на релационна БД. Това се вижда в колоната “ImeMes” (Фиг. 20), която работи с формула от Google Sheets, пак по подобие на работата в Microsoft Excel. Формулата взема данните от друга таблица в която всеки номер на месец съответства неговото име. По този начин, когато скрипта запълни колоната “MesecNum”, съответното име се изписва в колоната “ImeMes”. Това също влияе над резултата на заявката. При промяна в таблицата се променят данните изведени от заявката.

Изводи

1. Работата с Access е лесна и ефикасна без сравнителни ограничения. Фактът, че всичко нужно за създаването и използването на дадена БД е налично при стартирането на програмата е голямо предимство. От друга страна, работата с VBA и неговите особености не се овладява веднага. Друго предимство е неговата достъпност за повечето потребители. Този метод е подходящ за лична полза или за полза от малък бизнес, тъй като не изисква много знания нито много ресурси. Като недостатък го има това че, интеграцията на файлове от Access към друг вид платформа е много трудоемко. Интеграцията на БД от Access към друг вид система е ограничена поради липса на съвместимост с технологиите нужни за пълната и експлоатация. Това обаче не променя фактът, че Access и VBA са добра основа с която може да се навлезе в сферата на изработване и управление на БД.

2. MySQL като система за изработване на БД е сходна на тази в Access но свързването с Node.js придава особености. Повечето потребители, които искат да работят с този вид БД трябва да имат добри познания за синтаксиса на езика в MySQL, както и работата с JavaScript. Въпреки това, след като се разберат основните принципи на процеса, възможностите на тази БД са многобройни. MySQL като система също е съвместима с много други различни видове средства, така че Node.js е само един от много варианти за проектирането на такъв проект.

3. Работата с Google Sheets, чрез скриптове в Python, предоставя лесна алтернатива за проектирането на БД. Въпреки лишението от релационна система, възможностите на този вид разработка позволяват за бърза и лесна работа с малки проекти. Освен това, липсата на връзки между таблиците позволява за по-свободно манипулиране на данните. Въпреки всички тези позитиви, липсата на релационна структура води до нужда от алтернативни методи за

създаване на връзки между различните таблици. Още един плюс е това, че API моделът е лесен за интеграция с различни видове програми. Това го прави добър избор за подръчна и гъвкава БД, която може да се разработи за лична позла или професионални задължения.

REFERENCES

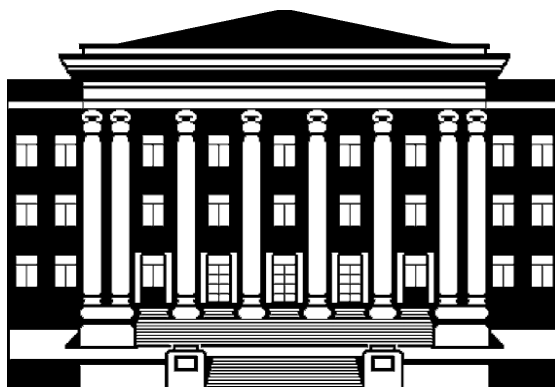
Ambrosius, L (2013). Introduction to Visual Basic® for Applications for Autodesk® AutoCAD®. Autodesk University. URL: https://static.au-uw2-prd.autodesk.com/CM1560-L_handout_1560_CM1560L_Ambrosius_LabHandout.pdf (accessed on 11.07.2025).

Axmark, D & Widenius, M. (2025). MySQL 8.0 Reference Manual including MySQL NDB Cluster 8.0. Oracle Corporations. URL: <https://downloads.mysql.com/docs/refman-8.0-en.pdf> (accessed on 11.07.2025).

Burnashev, A (2021). Gspread Documentation, Release 5.1.1. Gspread.org. URL: https://docs.gspread.org/_/downloads/en/v5.1.1/pdf/ (accessed on 11.07.2025).

UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“

UNION OF SCIENTISTS - RUSE



**65TH ANNUAL SCIENTIFIC CONFERENCE
OF UNIVERSITY OF RUSE „ANGEL KANCHEV“
AND UNION OF SCIENTISTS – RUSE**

OCTOBER 2025

INVITATION

**Ruse, 8 Studentska str.
University of Ruse
Bulgaria**

PROCEEDINGS
Volume 64, Series 6.7

Financial Mathematics
&
Informatics

Under the general editing of:
Assoc. Prof. Svetlozar Tsankov, PhD

Editor of Volume 64:
Prof. Daniel Bratanov, PhD

Bulgarian Nationality
First Edition

Printing format: A5
Number of copies: on-line

ISSN 1311-3321 (print)
ISSN 2535-1028 (CD-ROM)
ISSN 2603-4123 (on-line)

The issue was included in the international ISSN database, available at <https://portal.issn.org/>.
The online edition is registered in the portal ROAD scientific resources online open access



PUBLISHING HOUSE
University of Ruse "Angel Kanchev"